

ارزیابی دقت تقریب در پانل‌سازی سطوح منحنی معماری (مطالعه موردی پانل‌های چهارگوش)^۱

فائزه رضانی^۱، مجید احمدنژاد کریمی^{۲*}، عاصم شرباف^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فناوری معماری دیجیتال، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران.

fa.ramazani@tabriziau.ac.ir

۲- استادیار، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران. (نویسنده مسئول)

m.ahmadnejad@tabriziau.ac.ir

۳- استادیار، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز، تبریز، ایران

a.sharbafe@tabriziau.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۱۴۰۴/۷/۱۲]

تاریخ دریافت: [۱۴۰۴/۳/۲۳]

چکیده

ظهور هندسه‌های پیچیده در معماری معاصر، چالش تبدیل سطوح آزاد به پانل‌های قابل ساخت را به یکی از مسائل اساسی طراحی و ساخت دیجیتال تبدیل کرده است. اگرچه روش‌های متعددی برای پانل‌بندی سطوح آزاد توسعه یافته‌اند، انتخاب روش مناسب همواره با مبادله میان دقت هندسی، کیفیت بصری و ملاحظات اجرایی همراه است و تاکنون چارچوبی نظام‌مند برای تصمیم‌گیری آگاهانه بر پایه معیارهای کمی ارائه نشده است. هدف این پژوهش، توسعه یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره برای ارزیابی و انتخاب روش مناسب پانل‌بندی چهارگوش بر اساس شاخص‌های مکمل دقت هندسی است. نوآوری پژوهش در ارائه چارچوبی ترکیبی مبتنی بر تحلیل هم‌زمان فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) و زاویه کینک و نیز تحلیل تطبیقی الگوهای توزیع خطا در روش‌های متداول پانل‌بندی نهفته است؛ رویکردی که تاکنون به صورت یکپارچه و در شرایط کنترل‌شده گزارش نشده است. برای ارزیابی قابلیت کاربرد چارچوب پیشنهادی، یک سطح مرجع نرئز با انحنا مرکب، شامل نواحی با انحنا گausسی مثبت، منفی و صفر، در نرم‌افزار راینو مدل‌سازی شد. این سطح به دلیل برخورداری از تنوع رفتارهای هندسی، به عنوان مطالعه موردی انتخاب گردید تا امکان ارزیابی جامع روش‌ها فراهم شود. چهار روش پانل‌بندی شامل آجرچینی، شبکه‌بندی منظم، چهارضلعی‌های کج و بازمش‌بندی تطبیقی در محیط گرس‌هاپر پیاده‌سازی و عملکرد آن‌ها بر اساس سه شاخص مذکور مقایسه شد. نتایج نشان داد که روش شبکه‌بندی منظم با فاصله هاسدورف حداکثر ۴/۷۳ و ۴/۱۵ سانتی‌متر (به ترتیب از مرجع به پانل و از پانل به مرجع) و RMSE برابر ۱/۲۳ سانتی‌متر، بالاترین دقت هندسی را ارائه می‌دهد. در مقابل، روش بازمش‌بندی تطبیقی با میانگین زاویه کینک ۳/۲۷ درجه و حداکثر ۱۶/۳۶ درجه، بهترین پیوستگی زاویه‌ای و همواری بصری را نشان داد. روش آجرچینی با حداکثر فاصله هاسدورف ۲۷/۵۱ سانتی‌متر و RMSE برابر ۵/۳۹ سانتی‌متر، ضعیف‌ترین عملکرد را داشته و الگوی انحراف یک‌سویه سیستماتیک در آن مشاهده شد که می‌تواند به تجمع خطا در اتصالات منجر شود، در حالی که روش چهارضلعی‌های کج عملکردی میانی در تمامی شاخص‌ها داشت. یافته‌ها نشان داد هیچ‌یک از روش‌ها در تمامی معیارها برتری مطلق ندارند و میان دقت ابعادی و کیفیت بصری رابطه‌ای مبادله‌ای برقرار است. از این رو، چارچوب پیشنهادی با فراهم کردن امکان ارزیابی هم‌زمان معیارهای هندسی، ابزاری کاربردی برای انتخاب آگاهانه روش پانل‌بندی بر اساس اولویت‌های طراحی، الزامات ساخت و ویژگی‌های پروژه ارائه می‌کند و قابلیت به‌کارگیری برای سایر سطوح مرجع و روش‌های پانل‌بندی را نیز داراست.

واژگان کلیدی: پانل‌سازی چهارگوش، دقت تقریب، خطای هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا، زاویه کینک.

۱-مقاله حاضر برگرفته از پایان‌نامه کارشناسی ارشد نگارنده اول با عنوان «کاربرد هندسه رایانشی در ساده‌سازی ساخت سطوح منحنی معماری با استفاده از روش تقریب سطح» است که با راهنمایی نگارنده دوم و مشاوره نگارنده سوم در دانشگاه هنر اسلامی تبریز در حال انجام است.

۱- مقدمه

پیشرفت سریع مدل‌سازی دیجیتال، طراحی پارامتریک و فناوری‌های ساخت دیجیتال در دو دهه اخیر، امکان طراحی و اجرای سطوح آزاد با هندسه‌های پیچیده را در معماری معاصر فراهم کرده است. این سطوح که عمدتاً با مدل‌های نرئز و هندسه‌های غیراقلیدسی تعریف می‌شوند، آزادی بی‌سابقه‌ای در خلق فرم‌های معماری ایجاد کرده‌اند، اما هم‌زمان فاصله میان مدل دیجیتال و تحقق فیزیکی آن‌ها را به یکی از چالش‌های اساسی فرآیند طراحی و ساخت تبدیل کرده‌اند (Ryu, 2012; Bo et al., 2011). پژوهش‌های جدید در حوزه ساخت دیجیتال نیز نشان می‌دهند که ارزیابی هندسی پانل‌ها، پیش‌نیاز تصمیم‌گیری در مراحل ساخت و تولید است و انتخاب راهکار مناسب پانل‌بندی می‌تواند بر کارایی فرآیندهای طراحی و ساخت اثرگذار باشد (Mehdipoor et al., 2025).

برخلاف سطوح تخت که با مصالح و روش‌های متداول ساخت به‌سادگی قابل اجرا هستند، سطوح آزاد به دلیل تغییرات پیوسته انحنا، معمولاً قابلیت ساخت مستقیم ندارند و باید پیش از اجرا به مجموعه‌ای از قطعات مجزا و قابل تولید تبدیل شوند (Piaszkowy & Kaszynski, 2025). در این میان، پانل‌بندی چهارگوش به دلیل سازگاری با مصالح متداول نظیر شیشه، فلز و صفحات کامپوزیتی، سهولت تولید صنعتی و کاربرد گسترده در پوسته‌ها و نماهای آزاد، به یکی از رایج‌ترین راهکارهای گسسته‌سازی سطوح آزاد در معماری تبدیل شده است (Eigensatz et al., 2010).

پژوهش‌های پیشین در حوزه پانل‌بندی سطوح آزاد عمدتاً بر توسعه الگوریتم‌های تولید شبکه‌های چهارگوش، بهینه‌سازی ساخت‌پذیری، کاهش تعداد و تنوع پانل‌ها، افزایش تخت‌بودگی پانل‌ها و بهبود کیفیت تقریب هندسی متمرکز بوده‌اند (Eigensatz et al., 2010; Bommers et al., 2013; Tang et al., 2014; Fisher et al., 2024). برخی مطالعات نیز شاخص‌هایی نظیر فاصله هاسدورف، خطای میانگین مربعات و معیارهای همواری سطح را برای ارزیابی کیفیت تقریب معرفی کرده‌اند (Wang et al., 2018; Piaszkowy & Kaszynski, 2025). این پژوهش‌ها نقش مهمی در توسعه روش‌های پانل‌بندی داشته‌اند، اما عمدتاً هر روش را به‌صورت مستقل بررسی کرده یا تنها یک یا دو معیار محدود را مبنای ارزیابی قرار داده‌اند.

با وجود پیشرفت‌های صورت گرفته، سه خلأ اصلی در ادبیات موضوع همچنان باقی است: نخست، مقایسه تطبیقی روش‌های متداول پانل‌بندی در شرایط کنترل‌شده کمتر انجام شده است؛ دوم، ارزیابی هم‌زمان شاخص‌های مکمل دقت هندسی و کیفیت بصری به‌منظور تحلیل جامع عملکرد روش‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است؛ و سوم، چارچوبی نظام‌مند برای تبدیل نتایج این ارزیابی‌ها به تصمیم‌گیری در انتخاب روش مناسب پانل‌بندی بر اساس اولویت‌های پروژه ارائه نشده است.

بر این اساس، مسئله اصلی این پژوهش تعیین «بهترین» روش پانل‌بندی نیست، زیرا عملکرد هر روش به ویژگی‌های هندسی سطح، اهداف طراحی و محدودیت‌های ساخت وابسته است. هدف این پژوهش توسعه یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره برای ارزیابی و انتخاب روش مناسب پانل‌بندی چهارگوش سطوح آزاد معماری است. در این چارچوب، چهار روش متداول شامل آجرچینی، شبکه‌بندی منظم، چهارضلعی‌های کج و بازمش‌بندی تطبیقی به‌عنوان نمایندگان چهار راهبرد رایج تولید شبکه‌های چهارگوش در محیط راینو-گرس‌هاپر بر روی یک سطح مرجع با انحنا مرکب و تحت شرایط یکسان مقایسه شده‌اند. همچنین انتخاب پانل‌های چهارگوش به دلیل کاربرد گسترده آن‌ها در معماری معاصر، قابلیت ساخت با مصالح متداول و اهمیت آن‌ها در طراحی و اجرای پوسته‌های آزاد انجام شده است.

نوآوری پژوهش حاضر در توسعه یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره مبتنی بر تحلیل هم‌زمان سه شاخص مکمل فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) و زاویه کینک و نیز تحلیل الگوهای توزیع خطا در روش‌های مختلف پانل‌بندی است. برخلاف مطالعات پیشین که عمدتاً بر بهبود یک روش خاص یا ارزیابی عملکرد بر اساس یک معیار منفرد تمرکز داشته‌اند، پژوهش حاضر چارچوبی نظام‌مند برای مقایسه، تحلیل و انتخاب روش مناسب پانل‌بندی ارائه می‌دهد. این چارچوب، مستقل از سطح

مرجع یا روش خاص پانل‌بندی، قابلیت به‌کارگیری برای ارزیابی سایر سطوح آزاد و مجموعه‌های مختلف روش‌های پانل‌بندی را دارد و می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای پشتیبانی از تصمیم‌گیری در مراحل طراحی و ساخت دیجیتال مورد استفاده قرار گیرد.

۲- مرور مبانی نظری و پیشینه

پانل‌بندی سطوح آزاد طی دو دهه اخیر به یکی از مهم‌ترین موضوعات در هندسه معماری، طراحی محاسباتی و ساخت دیجیتال تبدیل شده است. پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه را می‌توان در سه جریان اصلی شامل (۱) توسعه مبانی هندسی و ساخت‌پذیری سطوح آزاد، (۲) توسعه الگوریتم‌های تولید شبکه و پانل‌بندی و (۳) بهینه‌سازی ساخت و ارزیابی عملکرد پانل‌بندی طبقه‌بندی کرد. نخستین جریان پژوهشی بر توسعه مبانی نظری هندسه محاسباتی و عقلانی‌سازی سطوح آزاد متمرکز بوده است. در این زمینه، پاتمن و همکاران^۱ (2007)، با تبیین اصول هندسه معماری، نقش تقریب هندسی، کنترل انحنا و ساخت‌پذیری را در تبدیل فرم‌های آزاد به اجزای قابل ساخت تشریح کردند. این مطالعات چارچوب نظری مستحکمی برای توسعه روش‌های پانل‌بندی فراهم ساختند و نشان دادند که کیفیت هندسی، پیش‌نیاز اصلی ساخت سطوح آزاد است. در ادامه، ایگنراتز و همکاران^۲ (2010)، با ارائه چارچوبی برای عقلانی‌سازی نماهای آزاد، معیارهایی نظیر تخت بودن پانل‌ها، هزینه تولید و محدودیت‌های ساخت را در فرآیند بهینه‌سازی وارد کردند. مهم‌ترین مزیت این پژوهش‌ها، ایجاد پیوند میان هندسه و ساخت‌پذیری بود؛ با این حال، تمرکز آن‌ها عمدتاً بر توسعه مدل‌های بهینه‌سازی بوده و مقایسه تجربی عملکرد روش‌های مختلف پانل‌بندی در شرایط یکسان یا ارائه مبنایی برای انتخاب میان آن‌ها مورد توجه قرار نگرفته است. پژوهش حاضر بر همین مبانی نظری استوار است، اما به جای توسعه یک روش جدید برای عقلانی‌سازی یا بهینه‌سازی هندسی، بر ارزیابی تطبیقی روش‌های رایج پانل‌بندی و تبدیل نتایج این ارزیابی به یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره برای انتخاب روش مناسب تمرکز دارد.

جریان دوم پژوهش‌ها بر توسعه الگوریتم‌های تولید شبکه‌های چهارگوش و بهبود کیفیت توپولوژیک مش متمرکز بوده است. پژوهش‌های لیو و همکاران (2011)^۳ و بومز و همکاران^۴ (2013)، با استفاده از میدان‌های جهت و تکنیک‌های مش‌بندی چهارضلعی، امکان تولید شبکه‌های چهارگوش با کیفیت بالا، توزیع مناسب سلول‌ها و هم‌راستایی با ویژگی‌های هندسی سطح را فراهم کردند. این مطالعات نقش مهمی در پیشرفت طراحی محاسباتی و توسعه ابزارهای پانل‌بندی ایفا کردند و امروزه مبنای بسیاری از الگوریتم‌های رایج به‌شمار می‌روند. با وجود این، معیار اصلی ارزیابی در این پژوهش‌ها کیفیت توپولوژی شبکه، یکنواختی مش و هم‌راستایی هندسی بوده است و ارزیابی مستقیم دقت تقریب، توزیع خطا و کیفیت بصری پانل‌بندی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. پژوهش‌های اخیر نیز بر توسعه الگوریتم‌های تولید شبکه‌های چهارضلعی برای سطوح آزاد تمرکز داشته‌اند، اما ارزیابی تطبیقی روش‌های مختلف پانل‌بندی را بررسی نکرده‌اند (Deng et al., 2023).

در جریان سوم، پژوهش‌ها به سمت تلفیق طراحی، ساخت و ارزیابی عملکرد روش‌های پانل‌بندی حرکت کرده‌اند. تانگ و همکاران^۵ (2014) راهکارهایی برای عقلانی‌سازی تعاملی فرم و ساخت ارائه کردند که در آن محدودیت‌های اجرایی از مراحل اولیه طراحی وارد فرآیند تصمیم‌گیری می‌شد. این رویکرد موجب کاهش هزینه‌های ساخت و افزایش قابلیت اجرا گردید، اما تمرکز اصلی آن بر فرآیند طراحی تعاملی بود و نه مقایسه کمی روش‌های پانل‌بندی. از سوی دیگر، مطالعاتی مانند گاوریل و همکاران^۶ (2018) و وانگ

1 Pottmann et al.

2 Eigensatz et al.

3 Liu et al.

4 Bommers et al.

5 Tang et al.

6 Gavril et al.

و همکاران^۱ (2018) استفاده از شاخص‌های هندسی نظیر فاصله هاسدورف و خطای میانگین مربعات را برای ارزیابی کیفیت تقریب پیشنهاد کردند. مزیت این پژوهش‌ها، معرفی معیارهای کمی برای سنجش کیفیت هندسی بود؛ با این حال، اغلب آن‌ها تنها یک شاخص را مبنای ارزیابی قرار داده‌اند و تحلیل هم‌زمان دقت ابعادی، خطای کلی تقریب و کیفیت بصری اتصالات را به‌صورت یکپارچه بررسی نکرده‌اند. افزون بر این، تمرکز بیشتر این مطالعات بر ارزیابی یک الگوریتم یا توسعه یک روش خاص بوده و مقایسه نظام‌مند چند روش متداول پانل‌بندی در یک محیط کنترل‌شده کمتر انجام شده است.

مرورهای جدید نیز این روند را تأیید می‌کنند. فیشر و همکاران^۲ (2024) نشان می‌دهند که اگرچه طی سال‌های اخیر تنوع قابل توجهی از روش‌ها و الگوریتم‌های پانل‌بندی توسعه یافته است، اما ادبیات موجود عمدتاً بر ارائه الگوریتم‌های جدید یا بهینه‌سازی روش‌های موجود تمرکز دارد. در مقابل، چارچوب‌هایی که بتوانند عملکرد روش‌های رایج را بر اساس معیارهای متعدد، در شرایط یکسان و با هدف پشتیبانی از تصمیم‌گیری طراحی مقایسه کنند، همچنان محدود هستند.

مطالعات اخیر نیز با تمرکز بر بهینه‌سازی پانل‌بندی سطوح آزاد، بر وابستگی عملکرد الگوریتم‌ها به ویژگی‌های هندسی سطح تأکید کرده‌اند، اما چارچوبی برای تصمیم‌گیری چندمعیاره در انتخاب روش پانل‌بندی ارائه نکرده‌اند (Liu & Liu, 2025).

مرور و تحلیل انتقادی مطالعات پیشین نشان می‌دهد که اگرچه پیشرفت‌های ارزشمندی در توسعه الگوریتم‌های پانل‌بندی و بهبود کیفیت شبکه‌های چهارگوش حاصل شده است، اما این مطالعات عمدتاً هر روش را به‌صورت مستقل یا بر اساس یک شاخص ارزیابی کرده‌اند. در نتیجه، شناخت جامعی از رفتار نسبی روش‌های متداول پانل‌بندی در شرایط یکسان و بر پایه مجموعه‌ای از شاخص‌های مکمل، شامل فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا و زاویه کینک، فراهم نشده است. افزون بر این، نتایج این پژوهش‌ها کمتر به ابزاری برای هدایت فرآیند انتخاب روش پانل‌بندی متناسب با اولویت‌های طراحی تبدیل شده‌اند و ارتباط میان ارزیابی کمی و تصمیم‌گیری طراحی همچنان نیازمند تبیین و توسعه است.

بر این اساس، هدف پژوهش حاضر توسعه یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره برای ارزیابی و انتخاب روش مناسب پانل‌بندی چهارگوش سطوح آزاد معماری است. بدین منظور، چهار روش متداول پانل‌بندی بر روی یک سطح مرجع با انحنای مرکب و بر پایه سه شاخص مکمل شامل فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا و زاویه کینک ارزیابی شدند. نوآوری پژوهش در ارائه چارچوبی نظام‌مند است که با تحلیل هم‌زمان این شاخص‌ها و الگوی توزیع خطا، امکان انتخاب آگاهانه روش پانل‌بندی را بر اساس اولویت‌های هندسی پروژه فراهم می‌کند.

۲-۱- انواع پانل‌بندی

مش‌بندی سطوح که به معنای تقسیم‌بندی یک سطح یا شکل به بخش‌های کوچک‌تر و ساده‌تر قابل شبیه‌سازی در نرم‌افزارهای طراحی است، یکی از مهم‌ترین مباحث در طراحی هندسی معماری و مهندسی محسوب می‌شود (Farin, 2002; Shewchuk, 2002). این فرآیند نقشی حیاتی در معماری دیجیتال و ساخت به کمک رایانه (CAM) ایفا می‌کند (Pottmann et al., 2007; Pottmann, 2013)؛ و به طراحان اجازه می‌دهد تا با بهینه‌سازی هندسی مش‌ها و استفاده کمتر از مواد، ضمن حفظ استحکام و کارایی سازه، اشکال پیچیده را با دقت بالا مدل‌سازی و تولید کنند (Eigensatz et al., 2010; Li et al., 2014). در ادامه، انواع اصلی پانل‌سازی بر اساس شکل هندسی، به اختصار معرفی می‌گردد (جدول ۱):

پانل‌سازی مثلثی که رایج‌ترین الگوی گسسته‌سازی سطوح فرم آزاد است (Stefańska & Rokicki, 2022)، به دلیل هندسه پایدار و صفحه‌ای بودن ذاتاً مثلث‌ها، مشکل ناپیوستگی زاویه‌ای یا تابیدگی را ایجاد نمی‌کند (Pottmann et al., 2007). با این حال، چالش

1 Wang et al.

2 Fisher et al.

اصلی آن پیچیدگی اتصالات است؛ چه آن‌که در شبکه مثلثی شش عضو در هر گره به یکدیگر متصل می‌شوند که طراحی و ساخت گره‌ها را پرهزینه می‌سازد (Schmiedhofer et al., 2008). در مقابل، پانل‌سازی چهارگوش به دلیل تطابق بهتر با شبکه‌های سازه‌ای و زیبایی‌شناسی رایج در معماری، جایگاه ویژه‌ای یافته است (Bo et al., 2011). مش‌های چهارضلعی که معمولاً از شبکه‌ای از مربع‌ها و مستطیل‌ها تشکیل می‌شوند، در صنایع خودروسازی و معماری نقشی مهم در ایجاد ساختارهای پیچیده و دقیق ایفا می‌کنند. در این ساختار، اتصالات به‌وسیله نقاط (ورتکس‌ها) و لبه‌ها صورت می‌گیرد و هر چهارضلعی به چهار نقطه متصل است؛ ویژگی‌ای که مدل‌ها را از نظر دقت و پایداری بهینه می‌سازد (Farin, 2002).

یکی از مزایای بارز این الگو در مقایسه با شبکه‌های مثلثی، کاهش پیچیدگی اتصالات است. در پانل‌سازی چهارگوش، چهار عضو در هر گره به یکدیگر متصل می‌شوند که در مقابل اتصال شش عضوی در شبکه‌های مثلثی، طراحی و ساخت را ساده‌تر می‌کند (Schmiedhofer et al., 2008). افزون بر این، شبکه‌های چهارگوش تراکم کمتری از اعضا ایجاد می‌کنند که حس فضای بازتری را در زیر سطح فراهم می‌آورد (Glymph et al., 2004).

با این وجود، چالش اساسی در پانل‌سازی چهارگوش، تضمین صفحه‌ای بودن پانل‌هاست. برخلاف مثلث‌ها که ذاتاً صفحه‌ای هستند، چهارضلعی‌ها لزوماً این ویژگی را ندارند و عدم تخت بودن کامل پانل‌ها می‌تواند به شکست ناگهانی مصالح شکننده مانند شیشه بینجامد (Glymph et al., 2004)؛ بنابراین، تمرکز اصلی در این روش بر حفظ تخت بودن پانل‌ها در عین تولید مش است. برای غلبه بر این چالش، روش‌های متعددی از جمله الگوریتم‌های مبتنی بر میدان‌های انحنای اصلی و بهینه‌سازی توسعه یافته است (Eigensatz et al., 2010; Pottmann et al., 2007). همچنین، روش‌های تقسیم‌بندی تطبیقی که در آن نقاط با فاصله بیشتر در مناطق کم‌اهمیت و با فاصله کمتر در نواحی حساس‌تر قرار می‌گیرند، در بهینه‌سازی مش‌های چهارضلعی مؤثر بوده و به طراحان امکان می‌دهد منابع محاسباتی را مدیریت کرده و دقت مدل‌سازی را افزایش دهند.

پانل‌سازی چندضلعی علی‌رغم کاربرد کمتر نسبت به دو الگوی پیشین، در برخی موارد خاص معماری به کار می‌رود. این الگوها با تعداد پانل‌های کمتر، پوشش سطح را ممکن ساخته و جلوه بصری متمایزی ایجاد می‌کنند (Pottmann et al., 2007). با این حال، تولید پانل‌های چندضلعی صفحه‌ای برای سطوح با انحنای مضاعف، چالش‌برانگیز و نیازمند روش‌های پیچیده‌تر تولید مش است (Schmiedhofer et al., 2008). این دسته از مش‌ها که می‌توانند شامل پنج‌ضلعی و اشکال با اضلاع بیشتر باشند، به‌ویژه در شبیه‌سازی‌های هندسی و تحلیل‌های تنش کاربرد دارند (Park, 2001). پیچیدگی روابط بین عناصر در این مش‌ها، دقت و ظرافت بیشتری را در طراحی و شبیه‌سازی طلب می‌کند.

روش نوارهای گسترش‌پذیر^۱ رویکردی دیگر در تقریب سطوح آزاد است که در آن، ساختارهای سه‌بعدی با استفاده از قطعات دوبعدی و بدون نیاز به عناصر منحنی ایجاد می‌شوند. این قطعات با دستگاه‌هایی مانند CNC و لیزرکاتر قابل تولید هستند (Sevtsuk & Kalvo, 2014). سطوح گسترش‌پذیر (مانند استوانه و مخروط) دارای انحنای گاوسی صفر بوده و بدون تغییر شکل به سطحی مسطح باز می‌شوند. این ویژگی، آن‌ها را در معماری مدرن و طراحی صنعتی بسیار پرکاربرد ساخته و به کاهش هزینه‌ها و افزایش دقت در ساخت اشیای پیچیده کمک می‌کند (Glaeser & Gruber, 2007). در این تکنیک، سطوح منحنی پیچیده با استفاده از سطوح مخروطی و استوانه‌ای مماس بر خطوط کانتور، ساده‌سازی می‌شوند (Eigensatz et al., 2010). روش تا کردن منحنی نیز یکی از شیوه‌های نوآورانه در این زمینه است که امکان ایجاد ساختارهای سه‌بعدی پیچیده از ورق‌های مسطح را بدون کشیدگی یا برش فراهم می‌کند (Kilian et al., 2008).

جدول ۱: طبقه بندی روش های هندسی پانل سازی سطوح منحنی بر اساس پیشینه تحقیق (تنظیم: نگارندگان)

نوع پانل بندی	طبقه بندی مبتنی بر برخی از رایج ترین روش های هندسی و الگوریتم ها	طبقه بندی مبتنی بر روش انجام
مش مثلثی	▪ مثلث بندی دیلانی: این الگوریتم یک مش مثلثی با ویژگی هایی از جمله کمینه کردن اندازه بزرگترین مثلث ها تولید می کند و برای ایجاد مثلث ها بهینه است (Shewchuk, 2002). ▪ کم کردن گوشه ها: یک روش ساده برای تقسیم یک چندضلعی به مثلث ها که شامل حذف «گوشه ها» از شکل است (Eder et al., 2018). ▪ جبهه پیش رونده: این روش با شروع از مرز و گسترش مثلث ها به سمت داخل شکل کار می کند (Kwak & Pozrikidis, 1998). ▪ زیربخشی: این روش با شروع از یک مش اولیه، آن را به صورت تکراری به زیرمش های کوچک تر تقسیم می کند (Catmull & Clark, 1978).	هر یک از روش های هندسی و الگوریتم ها می تواند با رویکردهای زیر ادغام شود: ➤ رویکرد منظم: در این رویکرد، منحنی مورد نظر به یک شبکه منظم و متقارن تقسیم می شود که هر سلول یا المان آن می تواند به طور مستقل مورد بررسی قرار گیرد (Botsch et al., 2010) ➤ رویکرد نامنظم: رویکرد نامنظم می تواند به راحتی با هندسه های پیچیده و غیر منظم سازگار شود که این ویژگی بسیار مهم است، به ویژه در کاربردهایی که هندسه های واقعی پیچیده هستند (Botsch et al., 2010)
مش چهارضلعی	▪ مش بندی چهارگوشه غالب: این روش بر اساس تولید مش های چهارگوشه غالب است. در این روش، هدف تولید مش هایی با چهارضلعی های بیشتر و مثلث های کمتر است (Owen, 1998). ▪ الگوریتم زیر بخشی چایکین: یکی از روش ها برای هموار کردن و بهبود کیفیت منحنی های چندضلعی است. این الگوریتم به ویژه برای شکل دهی مجدد و نرمی منحنی ها استفاده می شود (Chaikin, 1974). ▪ الگوریتم زیربخشی کتمول کلارک: این الگوریتم به طور خاص برای سطوح چندضلعی (سه ضلعی، چهارضلعی و بیشتر) با شکل های منظم و نامنظم طراحی شده و به ایجاد سطوحی با جزئیات بالا و منحنی های هموار کمک می کند (Nasri et al., 2006). ▪ طرح زیربخشی دو-سایین: این الگوریتم به ویژه برای مش های چندوجهی غیر منظم و غیرمربعی طراحی شده و به ایجاد سطوح با جزئیات بالا و شکل های نرم کمک می کند (Doo & Sabin, 1978).	➤ رویکرد تطبیقی: این رویکرد با تغییر پویا شبکه مش در طول شبیه سازی، به نیازهای خاص مسئله پاسخ می دهد و به طور خاص در تحلیل هایی که دارای ویژگی های موضعی یا تغییرات شدید هستند، بسیار مؤثر است (Babuška & Strouboulis, 2004)
مش چندضلعی	▪ انواع روش های زیربخشی (بیان شده در ردیف مش چهارضلعی): این روش شامل تقسیم یک سطح به چندضلعی های کوچک تر است که می تواند شامل چندضلعی های پنج ضلعی و بیشتر باشد. این تقسیم بندی به صورت تکراری انجام می شود تا سطح نهایی به دست آید (Warren & Weimer, 2001). ▪ نسل مش چندوجهی: این روش به تولید مش های چندضلعی با استفاده از الگوریتم های خاص برای ایجاد چندضلعی های بزرگ تر از چهار ضلع می پردازد. این روش معمولاً شامل شبکه های متنوعی از چندضلعی ها است (Abdelkader et al., 2020). ▪ نمودارهای ورونوی: این روش به تولید مش های چندضلعی با استفاده از تقسیم بندی فضا به نواحی اطراف نقاط خاص می پردازد (Aurenhammer, 1991). ▪ چندضلعی های با تعداد اضلاع مختلف باشند (Shewchuk, 2002). ▪ تولید مش چهاروجهی با اصلاح چند وجه: این روش ابتدا مش های	➤ رویکرد سلسله مراتبی: در این رویکرد، مش به صورت سلسله مراتبی و در سطوح مختلف سازماندهی می شود. این به این معناست که مش می تواند شامل سلول ها یا المان های مختلفی با اندازه ها و ویژگی های متفاوت باشد که به صورت لایه ای یا سطحی از هم تفکیک شده اند (Beckingsale et al., 2016)

چهاروجهی تولید می‌کند و سپس با استفاده از تکنیک‌های خاص، به
 مش‌های چندضلعی با بیش از چهار ضلع تبدیل می‌شود (Salinas et
 al., 2025)

■ **نوار گسترش‌پذیر** ■ روش نوارهای گسترش‌پذیر خطی: نوارها به صورت خطی و با استفاده
 از خطوط مستقیم تعریف می‌شوند. این نوارها معمولاً در سطوحی که
 انحنا کمی دارند، استفاده می‌شوند (Liu, Pottmann, & Wang, 2011).

■ روش نوارهای گسترش‌پذیر غیرخطی: نوارها به صورت منحنی و
 غیرخطی تعریف می‌شوند. این روش به سطوحی که انحناهای
 پیچیده‌تری دارند، اجازه می‌دهد تا به‌طور دقیق‌تر تقریب زده شوند
 (Kolmanič & Guid, 2002).

۲-۲- دسته‌بندی سطوح منحنی

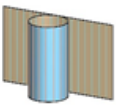
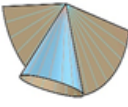
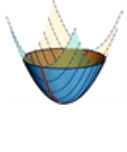
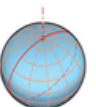
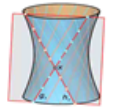
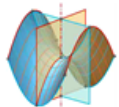
سطوح منحنی در معماری معاصر، به واسطه پیچیدگی‌های هندسی و چالش‌های ساختاری مرتبط با آن‌ها، به یکی از محوری‌ترین
 موضوعات پژوهشی تبدیل شده‌اند. طبقه‌بندی این سطوح بر اساس انحنا، امکان درک عمیق‌تری از ویژگی‌های ساختاری،
 زیبایی‌شناختی و فنی آن‌ها را فراهم می‌آورد. به‌طور کلی، سطوح منحنی را می‌توان بر اساس معیارهایی چون میزان انحنا، قابلیت تولید
 صنعتی، امکان تفکیک به پانل‌های مسطح و روش‌های بهینه‌سازی تولید دسته‌بندی کرد (جدول ۲).

یکی از رایج‌ترین رویکردها برای طبقه‌بندی سطوح منحنی، تقسیم آن‌ها بر اساس میزان انحنا موجود در ساختارشان است. از این
 منظر، سطوح به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند: سطوح با انحنا ثابت و سطوح با انحنا متغیر (do Carmo, 2016; O'Neill, 2006).
 سطوح با انحنا ثابت، مانند کره و استوانه، دارای ویژگی‌های هندسی یکنواختی هستند. کره در تمامی نقاط دارای انحنا یکسان بوده
 و فاصله هر نقطه از سطح تا مرکز آن برابر است. استوانه نیز با انحنا ثابت در یک بعد (حول محور خود)، نمونه دیگری از این دسته
 محسوب می‌شود. در مقابل، سطوح با انحنا متغیر (مانند سطوح آزاد) پیچیدگی بیشتری دارند و به دلیل تغییرات انحنا در نقاط
 مختلف، می‌توانند طیف گسترده‌ای از اشکال و ویژگی‌ها را به نمایش بگذارند؛ برای نمونه، یک سطح آزاد ممکن است در نقطه‌ای
 کاملاً مسطح و در نقطه‌ای دیگر به شدت خمیده باشد. این ویژگی‌ها موجب کاربرد گسترده سطوح با انحنا متغیر در زمینه‌هایی چون
 معماری و طراحی صنعتی شده است.

علاوه بر جنبه‌های صرفاً هندسی، دسته‌بندی فرم‌های منحنی در معماری و طراحی سازه‌های پوسته‌ای نیز مورد توجه قرار گرفته است.
 بررسی فرم‌های منحنی آزاد، سطوح گسترش‌پذیر و سطوح دو انحنایی، نقشی کلیدی در تحلیل سازه‌های پیچیده ایفا می‌کند (Park et
 al., 2020). فرم‌های منحنی آزاد به معماران امکان می‌دهند تا با خلاقیت و نوآوری بیشتری به طراحی پرداخته و فضاهایی
 منحصر به فرد خلق کنند. این فرم‌ها به دلیل فقدان خطوط مستقیم و زوایای تند، حس لطافت و جریان را به فضا می‌بخشند. سطوح
 گسترش‌پذیر نیز از جنبه‌های اساسی در طراحی سازه‌های بزرگ‌مقیاس به شمار می‌روند و امکان طراحی و اجرای مؤثر و کارآمد
 سازه‌هایی با ابعاد وسیع را فراهم می‌آورند. سطوح دو انحنایی نیز با ویژگی‌های خاص خود، به تحلیل دقیق‌تر و بهینه‌سازی عملکرد
 سازه‌ها کمک کرده و با توزیع یکنواخت بارها، پایداری و استحکام بیشتری برای سازه فراهم می‌آورند.
 در دسته‌بندی دیگری که مبتنی بر انحنا گاوسی است، سطوح منحنی به سه نوع زیر تقسیم می‌شوند:

- ✓ سطوح تک‌انحناء: این سطوح دارای انحنای گاوسی صفر هستند، به این معنا که می‌توان آن‌ها را بدون تغییر شکل از یک صفحه مسطح گسترش داد. نمونه‌های رایج شامل استوانه‌ها و مخروط‌ها هستند (Gerritsen, 2006).
- ✓ سطوح دو انحناء: این سطوح دارای انحنای گاوسی غیرصفر بوده و شامل انواعی مانند کره‌ها، سطوح سهموی و هذلولی هستند که نمی‌توان آن‌ها را بدون تغییر شکل بر روی یک صفحه صاف گسترش داد (Park et al., 2020).
- ✓ سطوح آزاد^۳: این دسته شامل سطوحی با خمیدگی‌های پیچیده و بدون فرم ریاضی صریح است که در طراحی‌های مدرن، به‌ویژه با استفاده از ابزارهایی مانند راینو و گرس‌هاپر، کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند (Pottmann et al., 2007).

جدول ۲: دسته‌بندی سطوح منحنی بر اساس مفاهیم موجود در انحنای سطح (مأخذ: نگارندگان)

دسته‌بندی سطوح منحنی						
تک انحناء:				دو انحناء:		
دارای هندسه خطدار گسترش‌پذیر. دارای انحنای گاوسی صفر ($K=0$).				دارای هندسه گسترش‌ناپذیر. دارای انحنای گاوسی		
				یک طرفه: دارای انحنای گاوسی غیرصفر ($K>1$).		دو طرفه: دارای انحنای گاوسی غیرصفر ($K<1$).
استوانه‌ای	مخروطی	گسترش‌پذیر مماسی	انتقالی	چرخشی	خطدار عمومی	انتقالی
						
فرم آزاد: ترکیبی از هندسه‌های گسترش‌پذیر و گسترش‌ناپذیر، شامل طیف متنوعی از انحنای گاوسی.						

۳-۲- معیارهای ارزیابی تقریب سطح

ارزیابی دقت تقریب در فرآیند پانل‌سازی سطوح منحنی، نقشی کلیدی در تضمین کیفیت ساخت و اجرای پروژه‌های معماری دیجیتال ایفا می‌کند. انتخاب روش مناسب پانل‌سازی بدون بهره‌گیری از معیارهای کمی و دقیق، امری دشوار و مستعد خطا خواهد بود. به‌طور کلی، ارزیابی دقت تقریب در پانل‌سازی سطوح منحنی مستلزم بررسی دو بعد اساسی است: نخست، دقت ابعادی که میزان انحراف موقعیتی نقاط سطح پانل‌شده از سطح مرجع را می‌سنجد و دوم، کیفیت بصری یا همواری که به پیوستگی زاویه‌ای در محل اتصال پانل‌ها مربوط می‌شود. در این راستا، سه معیار مکمل شامل فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا و زاویه کینک، به‌عنوان شاخص‌های اصلی در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته‌اند (جدول ۳). در ادامه، هر یک از این معیارها به تفصیل معرفی و تشریح می‌گردد.

۳-۲-۱- فاصله هاسدورف

فاصله هاسدورف^۴ یک معیار هندسی است که برای سنجش بیشترین انحراف بین دو سطح یا شکل به‌کار می‌رود و در معماری دیجیتال، به‌ویژه در مقایسه مدل‌های طراحی (مانند سطوح نرئز) و سطوح تقریبی (مانند پانل‌های چهارگوش)، کاربرد گسترده‌ای برای تضمین رعایت تلورانس‌های ساخت دارد (Pottmann et al., 2007; Eigensatz et al., 2010). این معیار به‌صورت ریاضی تعریف

1 Developable Surfaces
2 Double Curved Surfaces
3 Free-Form Surfaces
4 Hausdorff Distance

می‌شود: حداکثر فاصله بین هر نقطه روی یک سطح و نزدیک‌ترین نقطه روی سطح دیگر است (شکل ۱، الف) که به‌عنوان یک «سنجه بدترین حالت» برای انحراف هندسی عمل می‌کند (Farin, 2002).

هرچه این فاصله کوچک‌تر باشد، تطابق بین سطح مرجع و سطح پانل‌بندی شده به‌مراتب دقیق‌تر خواهد بود و این امر مستقیماً بر کیفیت نهایی ساختار، ساخت‌پذیری و رعایت تلورانس‌های مهندسی تأثیرگذار است (Pottmann et al., 2007; Eigensatz et al., 2010). در عمل، اگر حداکثر فاصله هاسدورف در یک پانل از مقدار مجاز فراتر رود، الگوریتم پانل‌سازی آن پانل را ریزتر تقسیم می‌کند یا نوع پانل‌بندی را تغییر می‌دهد تا دوباره در محدوده تلورانس قرار گیرد (Eigensatz et al., 2010; Li et al., 2014). این رویکرد در پروژه‌های پیچیده مانند پوسته‌های دوپوسته یا سازه‌های با انحنا مرکب، برای اطمینان از اینکه پانل‌های واقعی شکل معماری هدف را به‌خوبی دنبال می‌کنند، حیاتی است. این معیار حساسیت بیشتری به خطاهای موضعی (مانند تورفتگی‌ها، بیرون‌زدگی‌ها یا خطا در نصب) دارد. با این حال، فاصله هاسدورف تنها مقدار حداکثر انحراف را گزارش می‌کند و اطلاعاتی درباره توزیع این خطا در سطح کلی ارائه نمی‌دهد.

در این پژوهش، فاصله هاسدورف دوطرفه به‌عنوان معیاری برای سنجش حداکثر انحراف موضعی بین سطح مرجع و سطح پانل‌سازی شده استفاده شده است. این معیار هر دو جهت انحراف (سطح مرجع به سطح پانل و سطح پانل به سطح مرجع) را در نظر می‌گیرد تا اطمینان حاصل شود که هیچ انحرافی از هیچ یک از سطوح نادیده گرفته نشود.

۲-۳-۲- ریشه میانگین مربعات خطا

ریشه میانگین مربعات خطا^۱ (RMSE) به‌عنوان یک معیار کمی، برای ارزیابی میانگین خطای کلی بین سطح مرجع و سطح تقریبی در معماری دیجیتال استفاده می‌شود (Pottmann et al., 2007; Li et al., 2014). این معیار با محاسبه ریشه مربع میانگین مربعات فواصل بین نقاط سطح مرجع و سطح پانل‌سازی شده، اطلاعاتی درباره دقت کلی تقریب ارائه می‌دهد و به‌طور مکمل با معیار فاصله هاسدورف (که حداکثر انحراف را به صورت موضعی سنجش می‌کند)، تحلیل جامعی از دقت تقریب ارائه می‌کند (Eigensatz et al., 2010).

در این پژوهش، ریشه میانگین مربعات خطا به‌عنوان معیاری برای ارزیابی کیفیت کلی پانل‌سازی استفاده می‌شود. این معیار به طراحان امکان می‌دهد تا نه تنها نقاط حساس با انحراف بالا (که توسط فاصله هاسدورف شناسایی می‌شوند) را بررسی کنند، بلکه میانگین خطای کلی سطح را نیز در نظر بگیرند (شکل ۴، الف). به‌عنوان مثال، اگر ریشه میانگین مربعات خطا در یک روش پانل‌سازی کمتر از روش دیگر باشد، این نشان‌دهنده این است که این روش به‌طور کلی دقت بیشتری در تقریب سطح مرجع دارد، حتی اگر در برخی نقاط حداکثر انحراف (فاصله هاسدورف) بیشتر باشد (Cignoni et al., 1998).

۲-۳-۳- زاویه کینک

زاویه کینک^۲ معیاری است که برای کنترل حداکثر انحراف زاویه‌ای بین پانل‌های مجاور در فرآیند منطقی‌سازی سطوح آزادفرم به‌کار می‌رود. زاویه کینک (θ) زاویه بین بردارهای نرمال (N_1, N_2) دو سطح مجاور است (Pottmann, Eigensatz, Vaxman, & Wallner, 2015) (شکل ۱، ب). این معیار تضمین می‌کند که زاویه کینک در تمام اتصالات پانل‌ها از حد مجاز فراتر نرود که به سرهم‌بندی آسان‌تر، آب‌بندی بهتر اتصالات و جلوگیری از ایجاد سایه‌های ناخواسته در سطح نهایی ساختمان کمک می‌کند (Pottmann et al., 2007).

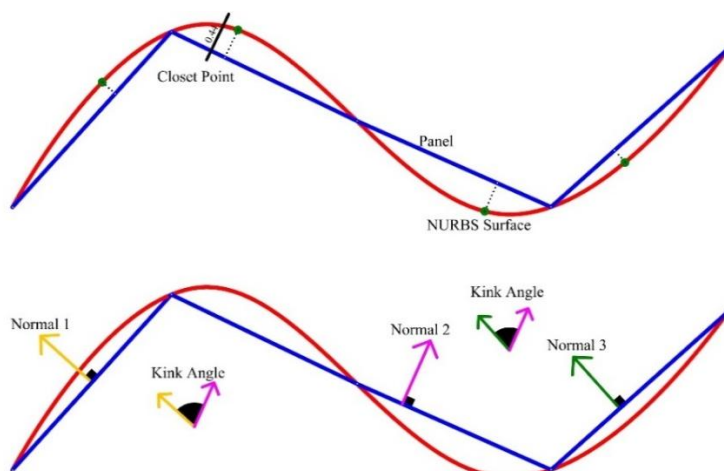
1 Root Mean Square Error

2 Kink Angle

در پروژه‌های معماری پیچیده، استفاده از این معیار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا زاویه‌های کینک کوچک (کمتر از ۵ درجه) نشان‌دهنده همواری بیشتر در اتصالات پانل‌ها و تطابق بهتر با سطح مرجع منحنی است، در حالی که زاویه‌های بزرگ‌تر (بیش از ۱۵ درجه) می‌توانند باعث مشکلات ساخت‌پذیری و کاهش کیفیت زیبایی‌شناسی و بصری شوند (Pottmann et al., 2007; Eigensatz et al., 2010).

جدول ۳: شرح معیارهای ارزیابی میزان تقریب پانل‌سازی سطوح منحنی (تنظیم: نگارندگان)

معیار	تعریف	فرمول	هدف ارزیابی
فاصله	حداکثر فاصله بین	$H(A, B) = \max(d_H(A, B), d_H(B, A))$	سنجش حداکثر
هاسدورف	هر نقطه روی	که در آن:	انحراف موضعی
دوطرفه	سطح پانل‌سازی و سطح مرجع	$d_H(A, B)$ نشان‌دهنده حداکثر انحراف از سطح مرجع A به سطح پانل‌سازی B است.	
		$d_H(B, A)$ نشان‌دهنده حداکثر انحراف از سطح پانل‌سازی B به سطح مرجع A است.	
ریشه	میانگین خطای	$RMSE_{ref} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i)^2}$	ارزیابی میانگین
میانگین	کلی بین نقاط		خطای کلی
مربعات خطا	سطح پانل‌سازی و سطح مرجع		
		که در آن:	
		d_i : فاصله اقلیدسی بین نقطه i روی سطح مرجع و نزدیک‌ترین نقطه روی سطح پانل‌سازی شده.	
		n : تعداد کل نقاط نمونه‌برداری شده از سطح مرجع.	
زاویه کینک	زاویه بین نرمال‌های دو پانل	$\theta = \cos^{-1} \frac{N_1 \cdot N_2}{\ N_1\ \ N_2\ }$	اندازه‌گیری
	مجاور در مرز	که در آن:	ناپوستگی زاویه‌ای
	مشترک آن‌ها	صورت برابر است با ضرب داخلی دو بردار نرمال.	و همواری در
		مخرج برابر است با ضرب طول دو بردار نرمال.	مرزهای پانل‌ها



شکل ۱: الف) ارزیابی فاصله هندسی (مأخذ: نگارندگان).

(نمای بالا): استخراج کمترین فاصله اقلیدسی بین نقاط نمونه‌برداری شده (به رنگ سبز) بر روی سطح منحنی مرجع (به رنگ قرمز) و سطح پانل‌های (به رنگ آبی) جهت محاسبه فاصله هاسدورف و ریشه میانگین مربعات خطا (ب) ارزیابی زاویه‌ای (نمای پایین): محاسبه زاویه کینک از طریق اندازه‌گیری زاویه بین بردارهای نرمال دو پانل مجاور در مرز مشترک؛ کاهش مقادیر هر سه معیار نشان‌دهنده عملکرد بهتر روش پانل‌سازی در تقریب سطح مرجع است.

۳- روش‌شناسی

این پژوهش یک مطالعه کمی مبتنی بر شبیه‌سازی محاسباتی با راهبرد مطالعه موردی کنترل‌شده است که با هدف توسعه و ارزیابی یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره برای انتخاب روش مناسب پانل‌بندی چهارگوش سطوح آزاد انجام شده است. رویکرد روش‌شناختی پژوهش بر پارادایم طراحی محاسباتی استوار است؛ بدین معنا که یک مدل هندسی کنترل‌شده به‌عنوان بستر آزمایش تعریف شده و چهار روش متداول پانل‌بندی در شرایط یکسان و قابل بازتولید پیاده‌سازی و ارزیابی شده‌اند. سپس داده‌های حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از سه شاخص کمی شامل فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا و زاویه کینک تحلیل و مقایسه شده‌اند تا عملکرد هر روش از منظر دقت هندسی و کیفیت بصری ارزیابی شود. استفاده از شبیه‌سازی محاسباتی در یک محیط کنترل‌شده، امکان کنترل متغیرهای مؤثر، تکرارپذیری آزمایش و مقایسه منصفانه روش‌های مختلف را فراهم می‌کند و از این‌رو، یکی از رویکردهای رایج در پژوهش‌های حوزه هندسه معماری، طراحی محاسباتی و ساخت دیجیتال برای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌های هندسی به‌شمار می‌رود. گام‌های اصلی این تحقیق عبارتند از:

✓ گام ۱: تعریف یک سطح مرجع هندسی با انحنا مرکب به‌عنوان نمونه مطالعه، سطح مرجع مورد استفاده در این پژوهش، دارای انحنا مرکب است؛ بدین معنا که نواحی با انحنا گاوسی مثبت ($0 < K$)، منفی ($0 > K$) و صفر ($K = 0$) به‌صورت هم‌زمان بر روی آن وجود دارند. در این پژوهش، «شرایط هندسی متنوع» به این معناست که سطح مرجع از نظر عینی دارای نواحی با پیچیدگی هندسی متفاوت است و عملکرد روش‌ها در این نواحی قابل مقایسه خواهد بود. انتخاب مدل نرَبز به‌عنوان بستر هندسی تحقیق به دلیل قابلیت بالای این نمایش ریاضی در توصیف دقیق سطوح آزاد و کاربرد گسترده آن در فرآیندهای طراحی و ساخت دیجیتال در معماری معاصر است. این سطح به‌عنوان یک مطالعه موردی برای نمایش و اعتبارسنجی چارچوب ارزیابی پیشنهادی انتخاب شده است؛ زیرا هدف اصلی پژوهش، توسعه و ارزیابی یک چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره است، نه استخراج نتایج قابل تعمیم برای تمامی سطوح آزاد. از این‌رو، مقادیر کمی به‌دست‌آمده به این نمونه وابسته‌اند، اما چارچوب ارزیابی ارائه‌شده مستقل از هندسه خاص بوده و قابلیت به‌کارگیری برای سایر سطوح مرجع و روش‌های پانل‌بندی را نیز دارد.

✓ گام ۲: روش پانل‌بندی چهارگوش به‌گونه‌ای انتخاب شدند که هر یک نماینده یکی از رویکردهای متداول در خانواده الگوریتم‌های پانل‌بندی سطوح آزاد باشند. روش آجرچینی نماینده الگوهای منظم مبتنی بر شبکه‌های انتقالی، روش شبکه‌بندی منظم نماینده پانل‌بندی مبتنی بر تقسیمات یکنواخت در فضای پارامتری سطح، روش چهارضلعی‌های کج نماینده رویکردهای مبتنی بر تغییر شکل و بهینه‌سازی چهارضلعی‌های پارامتری و روش بازمش‌بندی تطبیقی نماینده الگوریتم‌های تطبیقی مبتنی بر بازتولید مش و توزیع وابسته به انحنا سطح است. انتخاب این چهار روش به دلیل رواج آن‌ها در محیط‌های طراحی پارامتریک، تفاوت در منطق تولید شبکه و نمایندگی راهبردهای اصلی پانل‌بندی چهارگوش در ادبیات موضوع صورت گرفت. تمامی روش‌ها در محیط راینو-گرس‌هپر پیاده‌سازی و بر روی یک سطح مرجع واحد اعمال شدند. به‌منظور حفظ اعتبار مقایسه، پارامترهای مؤثر بر تولید شبکه، شامل تراکم پانل‌ها، جهت‌بندی تقسیمات و نحوه توزیع سلول‌ها تا حد امکان همگن تنظیم شدند تا تفاوت‌های مشاهده‌شده در نتایج، ناشی از منطق هندسی الگوریتم‌های پانل‌بندی باشد، نه تفاوت در تنظیمات اولیه یا شرایط اجرای آن‌ها.

✓ گام ۳: محاسبه و مقایسه دقت تقریب هر روش با استفاده از سه معیار مکمل (خطای هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا، زاویه کینک)، برای ارزیابی دقت تقریب، سه معیار کمی مکمل به کار گرفته می‌شوند. استفاده از سه معیار مکمل از این جهت علمی است که هر کدام از این معیارها جنبه‌های متفاوتی از دقت تقریب را پوشش می‌دهند: خطای هاسدورف برای شناسایی نقاط حساس با انحراف بالا؛ ریشه میانگین مربعات خطا برای ارزیابی خطای کلی سطح و زاویه کینک برای بررسی جنبه‌های بصری و ساخت‌پذیری

(همواری در مرزهای پانل‌ها). برای هر معیار، یک اسکریپت سفارشی در گرس‌هاپر نوشته می‌شود که داده‌های سطح مرجع و سطح پانل‌سازی را دریافت کرده و معیارها را محاسبه می‌کند. این الگوریتم‌ها بر اساس فرمول‌های ریاضی استاندارد پیاده‌سازی شده‌اند.

✓ گام ۴: تحلیل و مقایسه نتایج: نتایج سه معیار برای هر چهار روش پانل‌سازی در جدول‌های کمی ارائه می‌شود. ارزیابی هر روش به صورت مستقل بر اساس سه معیار تعیین شده صورت گرفت و نتایج حاصل، با بهره‌گیری از رویکرد تحلیل چندمعیاره و با در نظر گرفتن اولویت‌های خاص هر پروژه تفسیر شدند.

۳-۱- کنترل شرایط تحقیق

در مقایسه روش‌های مختلف پانل‌سازی چهارگوش برای یک سطح منحنی مرجع واحد، رعایت شرایط استاندارد به عنوان پیش‌نیازی ضروری برای اطمینان از صحت و قابلیت مقایسه‌پذیری نتایج شناخته شده است. در پژوهش‌های تجربی حوزه هندسه معماری، کنترل متغیرهای آزمایش اهمیت زیادی دارد؛ زیرا تغییر در عواملی مانند تراکم شبکه یا تعداد پانل‌ها می‌تواند به طور مستقیم بر مقدار خطاهای هندسی تأثیر بگذارد.

این مطالعه با تعریف دقیق یک سطح منحنی مرجع با انحنای مرکب شروع شد تا تمام روش‌های پانل‌سازی در یک محیط هندسی یکسان ارزیابی شوند. این سطح مرجع به گونه‌ای طراحی شد که انحنای آن در نقاط مختلف متنوع باشد تا چالش‌های واقعی پانل‌سازی را به طور کامل شبیه‌سازی کند (شکل ۲).

برای حفظ عدالت در مقایسه، تمام روش‌های پانل‌سازی تحت شرایط یکسان اجرا شدند: (۱) تعداد پانل‌ها در تمامی روش‌ها به طور تقریبی در محدوده ۹۵۰ پانل (با تلورانس ± 10) تنظیم شد. این عدد بر اساس محدودیت‌های ساخت‌پذیری واقعی در پروژه‌های معماری انتخاب شده است. با توجه به ابعاد سطح مرجع، این تعداد پانل منجر به ابعاد متوسط هر پانل در محدوده کمتر از ۲ متر می‌شود که با استانداردهای رایج تولید و نصب پانل‌های نما (مانند ورق‌های کامپوزیت آلومینیوم، شیشه یا ورق فلزی) سازگار است. انتخاب تعداد کمتر (مثلاً ۵۰۰ پانل) منجر به افزایش ابعاد هر پانل به بیش از ۳ متر می‌شود که مشکلاتی شامل افزایش وزن و نیاز به سیستم‌های نگهدارنده سنگین‌تر؛ محدودیت در حمل و نقل و نصب؛ افزایش خطر شکست در مصالح شکننده (مانند شیشه) را ایجاد می‌کند. از سوی دیگر، انتخاب تعداد بیشتر (مثلاً ۲۰۰۰ پانل) منجر به کاهش ابعاد پانل‌ها به کمتر از ۱ متر می‌شود که اگرچه دقت هندسی را افزایش می‌دهد، اما هزینه ساخت و نصب را به طور غیرمتناسب افزایش می‌دهد؛ تعداد اتصالات و درزها را چند برابر می‌کند (افزایش خطر نشست آب و هوا)، زمان اجرا را به طور قابل توجهی طولانی می‌کند؛ بنابراین، محدوده ۹۰۰ تا ۱۰۰۰ پانل به عنوان یک تعادل بهینه میان دقت هندسی و قابلیت ساخت در نظر گرفته شده است. این محدوده در پروژه‌های مشابه معماری پارامتریک (مانند نماهای دوپوسته، سقف‌های منحنی و پوسته‌های فضاکار) به طور رایج مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ (۲) تلورانس مجاز برای هر یک از معیارهای فاصله هاسدورف، ریشه میانگین مربعات خطا و زاویه کینک به طور یکسان در نظر گرفته شد؛ (۳) تمام روش‌ها تنها پانل‌های چهارگوش تولید کردند؛

(۴) در این پژوهش، ارزیابی عملکرد روش‌های پانل‌بندی بر پایه سه شاخص کمی شامل فاصله هاسدورف، RMSE و زاویه کینک انجام شده است. انتخاب این شاخص‌ها بر مبنای روایی و اعتبار آن‌ها در ادبیات هندسه محاسباتی، پردازش ابر نقاط و ارزیابی کیفیت تقریب سطوح صورت گرفته است (Cignoni et al., 1998; Aspert et al., 2002; Wang et al., 2018). فاصله هاسدورف حداکثر انحراف موضعی را اندازه‌گیری کرده و برای شناسایی بدترین حالت تقریب به کار می‌رود؛ RMSE نمایانگر میانگین خطای کلی سطح است و تصویری جامع از دقت هندسی ارائه می‌کند؛ و زاویه کینک میزان ناپوستگی زاویه‌ای در محل اتصال پانل‌ها را می‌سنجد که شاخصی معتبر برای ارزیابی همواری بصری، کیفیت اتصالات و ساخت‌پذیری پانل‌ها محسوب می‌شود. از آنجا که این سه شاخص، ابعاد متفاوت و مکمل کیفیت تقریب را اندازه‌گیری می‌کنند، استفاده هم‌زمان از آن‌ها روایی ارزیابی را افزایش داده و از سوگیری ناشی از اتکا به یک معیار منفرد جلوگیری می‌کند. همچنین، بهره‌گیری از شاخص‌های استاندارد و پذیرفته‌شده در ادبیات علمی، اعتبار ابزار

اندازه‌گیری را تقویت می‌کند. افزون بر این، تمامی محاسبات در محیط نرم‌افزاری یکسان راینو-گرس‌هاپر، با پارامترهای ثابت و فرآیندهای محاسباتی یکسان انجام شد که تکرارپذیری و پایایی نتایج را تضمین می‌کند.

(۵) در این پژوهش، تعداد ۲۰۰۰ نقطه به صورت نمونه‌برداری تصادفی یکنواخت از سطح مرجع انتخاب شد (شکل ۳). تعیین این تعداد بر سه مبنای روش شناختی استوار است. نخست، در روش‌های مبتنی بر مقایسه سطوح، افزایش تعداد نقاط نمونه موجب همگرایی تدریجی شاخص‌هایی مانند فاصله هاسدورف و RMSE می‌شود و پس از رسیدن به تراکم مناسب، افزایش بیشتر تعداد نقاط تأثیر ناچیزی بر مقادیر نهایی خواهد داشت (Cignoni et al., 1998; Aspert et al., 2002). دوم، با توجه به اینکه مدل‌های پانل‌بندی این پژوهش حدود ۹۵۰ پانل تولید می‌کنند، استفاده از ۲۰۰۰ نقطه نسبت تقریبی ۲/۱ نقطه به ازای هر پانل را فراهم می‌کند که برای پوشش یکنواخت کل سطح و ثبت تغییرات هندسی موضعی مناسب ارزیابی می‌شود. سوم، نمونه‌برداری تصادفی یکنواخت نسبت به نمونه‌برداری منظم در فضای پارامتری از تمرکز نقاط در نواحی خاص جلوگیری کرده و احتمال سوگیری ناشی از توزیع غیریکنواخت نقاط را کاهش می‌دهد. از این رو، تعداد و نحوه نمونه‌برداری انتخاب‌شده تعادل مناسبی میان دقت محاسبات، پایداری آماری نتایج و هزینه محاسباتی برقرار می‌کند و برای مقایسه منصفانه روش‌های مختلف پانل‌بندی کفایت دارد.

(۶) تمامی محاسبات در محیط نرم‌افزاری یکسان و با شرایط کنترل‌شده انجام گردید تا اختلافات ناشی از الگوریتم‌های متفاوت یا دقت محاسباتی نامتجانس حذف شود. با رعایت این شرایط، نتایج مقایسه‌پذیر و عاری از هرگونه سوگیری حاصل شد. این رویکرد از منظر روش شناختی بدان جهت اعتبار دارد که هر یک از سه معیار به طور مکمل، جنبه‌ای متفاوت از دقت تقریب را پوشش می‌دهند: خطای هاسدورف برای شناسایی نقاط حساس با حداکثر انحراف، ریشه میانگین مربعات خطا برای ارزیابی خطای میانگین در کل سطح و زاویه کینک برای سنجش همواری و پیوستگی در محل اتصالات پانل‌ها.

۳-۲- روش‌های پانل‌سازی مورد مقایسه و معیارهای انتخاب

در ادبیات تخصصی گسسته‌سازی سطوح فرم آزاد، روش‌های متنوع و پیشرفته‌ای برای تولید مش‌های چهارگوش وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش‌های مبتنی بر میدان‌های جهتی و به‌ویژه میدان‌های تقارن چرخشی و میدان‌های چهار جهته اشاره کرد (Pottmann et al., 2007; Ray et al., 2006; Bommers et al., 2013). این روش‌ها با هم‌راستایی با خطوط انحنا اصلی سطح، قادر به تولید مش‌هایی با کیفیت هندسی بالا و حداقل نقاط تکین هستند. همچنین روش‌های مبتنی بر پارامترسازی هم‌نوا در سال‌های اخیر توجه ویژه‌ای در حوزه منطقی‌سازی سطوح آزاد دریافت کرده‌اند (Springborn et al., 2008). با این حال، انتخاب روش‌های مورد مقایسه در پژوهش حاضر بر اساس معیار «قابلیت دسترسی و کاربردپذیری عمومی» صورت گرفته است، نه «پیشرفته‌ترین روش‌ها از منظر الگوریتمی». چهار روش انتخاب‌شده همگی در نرم‌افزار راینو و پلاگین گرس‌هاپر در دسترس هستند. بدین ترتیب، نتایج این پژوهش نه به‌عنوان قضایای مطلق و تعمیم‌پذیر به همه روش‌ها، بلکه به‌عنوان راهنمایی عملی در چارچوب روش‌های متداول و در دسترس ارائه می‌گردد.

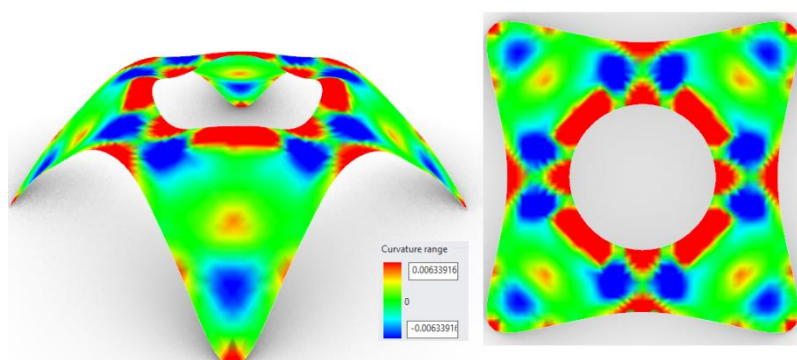
همچنین انتخاب روش‌های مورد مقایسه در این پژوهش بر اساس معیار کلیدی فنی و اجرایی پیوستگی صورت گرفته است. روش‌هایی انتخاب شدند که پانل‌های حاصل از آن‌ها بدون فاصله به یکدیگر متصل شوند. این ویژگی برای آب‌بندی، عایق‌کاری و جلوگیری از ایجاد خطاهای بصری در نماهای معماری ضروری است. بر این اساس، چهار روش متمایز مبتنی بر پانل‌های چهارگوش که هر دو شرط فوق را برآورده می‌کنند و قابلیت پیاده‌سازی در محیط گرس‌هاپر را دارند، انتخاب شدند (جدول ۴) و (شکل ۴):

✓ روش ۱: (الگوی آجرچینی با جابجایی نیم‌واحدی)، الگوریتم تولید مش چهارگوش مبتنی بر تقسیم‌بندی منظم سطح پارامتریک UV با ایجاد جابجایی نیم‌واحدی در ردیف‌های متناوب که پیوستگی بهتری در راستای انحنا ایجاد می‌کند.

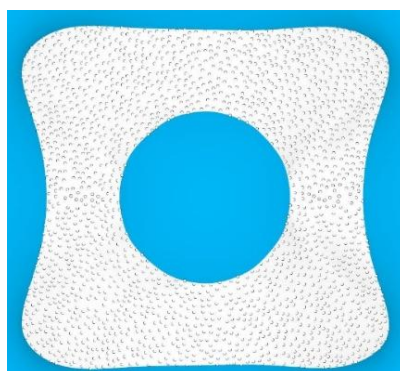
- ✓ روش ۲: (روش شبکه‌بندی منظم و یکنواخت بر اساس تقسیمات پارامتریک سطح)، ابزار پانل‌سازی مبتنی بر شبکه‌بندی یکنواخت دامنه پارامتریک UV سطح که پانل‌های چهارگوش منظم تولید می‌کند.
- ✓ روش ۳: (چهارضلعی‌های کج)، الگوریتم تولید پانل‌های چهارگوش با اعمال زاویه چرخش بر شبکه UV که امکان تنظیم جهت‌گیری پانل‌ها نسبت به جهت اصلی انحنا را فراهم می‌آورد.
- ✓ روش ۴: (بازمش‌بندی چهارگوش)، الگوریتم بازمش‌بندی چهارگوش مبتنی بر بهینه‌سازی توپولوژی که برخلاف سه روش قبلی، مش را بر اساس انحنا محلی سطح بهینه کرده و پانل‌هایی با توزیع تطبیقی تولید می‌کند روش‌هایی که ذاتاً دارای فاصله بین پانل‌ها بودند به دلیل عدم تطابق با معیارهای فوق در این مطالعه مورد بررسی قرار نگرفتند.

جدول ۴: معیارهای انتخاب روش‌های پانل‌سازی (مأخذ: نگارندگان)

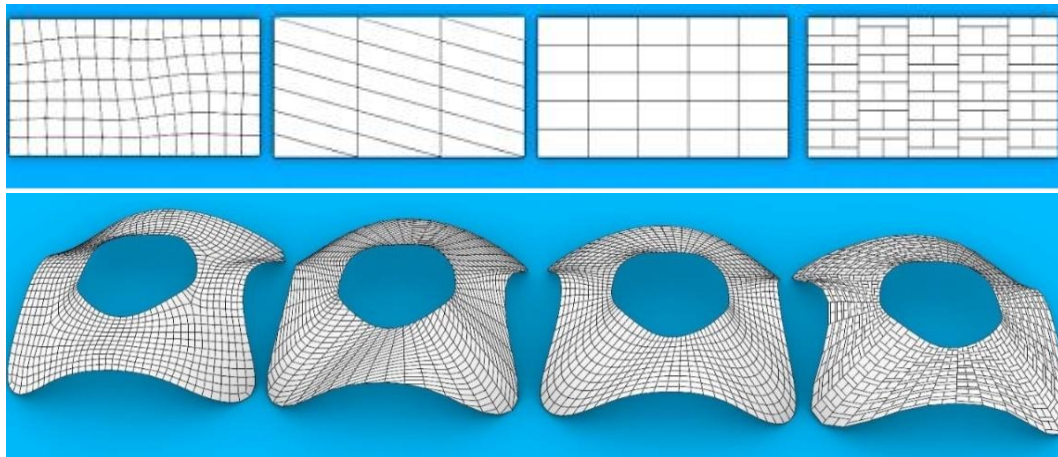
روش	پیاده‌سازی در گرس‌هاپر	مبتنی بر چهارگوش	پیوستگی
روش ۱: الگوی آجرچینی	✓	✓	✓
روش ۲: شبکه‌بندی منظم و یکنواخت	✓	✓	✓
روش ۳: چهارضلعی مایل	✓	✓	✓
روش ۴: بازمش‌بندی چهارگوش	✓	✓	✓



شکل ۲: سطح منحنی مرجع با انحنا مرکب؛ رنگ‌های قرمز، آبی و سبز به ترتیب نشان‌دهنده انحناهای گاوسی مثبت، انحناهای گاوسی منفی و مناطق کم‌انحنا هستند (مأخذ: نگارندگان).



شکل ۳: نمونه‌برداری ۲۰۰۰ نقطه یکنواخت از سطح مرجع جهت ارزیابی فاصله هاسدورف و ریشه میانگین (مأخذ: نگارندگان)



شکل ۴: نتیجه پیاده‌سازی چهار روش متفاوت پانل‌سازی چهارگوش بر روی سطح مرجع با انحنا مرکب؛ از راست به چپ: روش اول، روش دوم، روش سوم و روش چهارم (مآخذ: نگارندگان)

۴- یافته‌ها

نتایج حاصل از ارزیابی چهار روش پانل‌سازی چهارگوش بر روی سطح مرجع با انحنا مرکب، در این بخش ارائه و تحلیل می‌گردد. همان‌گونه که در (جدول ۵)، مشاهده می‌شود، تعداد پانل‌های تولیدشده در تمامی روش‌ها در محدوده ۹۵۱ تا ۹۵۹ پانل قرار دارد که حاکی از یکنواختی مناسب در تراکم پانل‌بندی و امکان مقایسه معتبر میان روش‌های مختلف است. نزدیکی قابل توجه تعداد پانل‌ها در چهار روش مورد بررسی، این اطمینان را ایجاد می‌کند که تفاوت‌های مشاهده‌شده در شاخص‌های خطا عمدتاً ناشی از ماهیت الگوریتمی روش‌های پانل‌سازی است و نه تفاوت در تراکم شبکه یا میزان تفکیک هندسی سطح. این مسئله، اعتبار مقایسه تطبیقی نتایج را به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد.

جدول ۵: نتایج ارزیابی چهار روش پانل‌سازی چهارگوش بر سطح مرجع با معیارهای فاصله هاسدورف، RMSE و زاویه کینک (مآخذ: نگارندگان)

روش پانل‌سازی	تعداد پانل	حداکثر فاصله هاسدورف (cm)		میانگین ریشه مربعات (cm) (از مرجع به پانل)	زاویه کینک (°)	
		از مرجع به پانل	از پانل به مرجع		حداکثر زاویه	میانگین زاویه
روش ۱	۹۵۹	۲۷/۵۱	۱۸/۲۴	۵/۳۹	۲۴/۵۴	۴/۹۰
روش ۲	۹۵۶	۴/۷۳	۴/۱۵	۱/۲۳	۱۲/۵۴	۳/۸۶
روش ۳	۹۵۳	۱۲/۰۳	۱۰/۹۹	۳/۰۷	۱۸/۹۴	۴/۷۶
روش ۴	۹۵۱	۱۳/۸۷	۴/۲۵	۱/۹۶	۱۶/۳۶	۳/۲۷

۴-۱- تحلیل فاصله هاسدورف

فاصله هاسدورف به‌عنوان معیاری برای سنجش حداکثر انحراف موضعی بین سطح مرجع و سطح پانل‌سازی شده مورد محاسبه قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که روش ۲ با حداکثر فاصله هاسدورف ۴/۷۳ سانتی‌متر (از مرجع به پانل) و ۴/۱۵ سانتی‌متر (از پانل به مرجع)، کمترین میزان انحراف موضعی را در میان روش‌های مورد بررسی نشان داد. روش ۳ با حداکثر فاصله ۱۲/۰۳ سانتی‌متر در رتبه دوم قرار گرفت. روش ۴ با خطای ۱۳/۸۷ سانتی‌متر در رتبه سوم جای گرفت. در مقابل، روش ۱ با حداکثر فاصله هاسدورف ۲۷/۵۱ سانتی‌متر، بیشترین انحراف موضعی را نشان داد که تقریباً شش برابر روش ۲ است.

یکی از یافته‌های قابل توجه، عدم تقارن جهت‌های انحراف در برخی روش‌ها است. در روش ۱، فاصله هاسدورف از سطح مرجع به پانل (۵۱/۲۷ سانتی‌متر) به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از جهت معکوس (۱۸/۲۴ سانتی‌متر) است. این انحراف یک‌سویه نشان‌دهنده آن است که الگوریتم پانل سازی به طور سیستماتیک پانل‌ها را در یک جهت خاص (در اینجا به سمت بیرون از سطح مرجع) منحرف می‌کند. چنین پدیده‌ای می‌تواند در فرآیند نصب واقعی منجر به ناهماهنگی‌های تجمعی شود؛ زیرا انحراف هر پانل به پانل بعدی منتقل شده و تشدید می‌گردد. روش ۴ نیز الگوی مشابهی (هرچند خفیف‌تر) نشان می‌دهد؛ به طوری که انحراف از پانل به مرجع (۴/۲۵ سانتی‌متر) بسیار کمتر از جهت مقابل (۱۳/۸۷ سانتی‌متر) است که این امر حاکی از وجود انحراف یک‌سویه با شدت کمتر در این روش است.

۴-۲- تحلیل ریشه میانگین مربعات خطا

معیار ریشه میانگین مربعات خطا برای ارزیابی میانگین خطای کلی بین سطح مرجع و سطح پانل سازی شده مورد استفاده قرار گرفت. نتایج نشان داد که روش ۲ با میانگین ریشه میانگین مربعات خطا برابر با ۱/۲۳ سانتی‌متر، بهترین عملکرد را از نظر دقت کلی تقریب ارائه نمود. روش ۴ با ریشه میانگین مربعات خطا معادل ۱/۹۶ سانتی‌متر در رتبه دوم قرار گرفت. روش ۳ با میانگین خطای ۳/۰۷ سانتی‌متر در رتبه سوم جای گرفت. روش ۱ با ریشه میانگین مربعات خطا برابر با ۵/۳۹ سانتی‌متر، بیشترین میانگین خطای کلی را به خود اختصاص داد.

ریشه میانگین مربعات خطا برخلاف فاصله هاسدورف، تصویری از رفتار کلی خطا در سراسر سطح ارائه می‌دهد و نسبت به نقاط منفرد حساسیت کمتری دارد. روش ۲ در هر دو معیار (هاسدورف و ریشه میانگین مربعات خطا) عملکرد برتری داشت که حاکی از دقت بالای این روش هم در نقاط بحرانی و هم در کل سطح است.

همگرایی نتایج دو معیار هاسدورف و ریشه میانگین مربعات خطا نشان‌دهنده پایداری هندسی الگوریتم پانل سازی در روش ۲ است؛ به این معنا که این روش نه تنها در کنترل نقاط بحرانی موفق عمل کرده بلکه در کل سطح نیز خطای محدودی ایجاد نموده است. این موضوع نشان می‌دهد که روش ۲ قادر است توزیع خطای یکنواخت‌تری را در سراسر سطح ایجاد نماید. از منظر کاربردی، این ویژگی موجب می‌گردد که فرآیند ساخت و نصب پانل‌ها با پیچیدگی کمتری مواجه باشد، زیرا انحرافات به صورت یکنواخت توزیع شده و نقاط بحرانی با انحراف بسیار بالا وجود ندارد.

۴-۳- تحلیل زاویه کینک

زاویه کینک به عنوان معیاری برای سنجش ناپیوستگی زاویه‌ای و همواری در مرزهای مشترک پانل‌ها محاسبه گردید. در طراحی پوسته‌های معماری، زاویه‌های کینک بالا می‌توانند علاوه بر تأثیرات بصری، پیامدهای سازه‌ای و اجرایی نیز داشته باشند؛ زیرا افزایش زاویه بین پانل‌ها موجب پیچیده‌تر شدن جزئیات اتصال و افزایش نیاز به قطعات واسط می‌شود.

بر اساس نتایج به دست آمده، روش ۴ با میانگین زاویه کینک ۳/۲۷ درجه، بالاترین میزان همواری در اتصالات پانل‌ها را دارا است. روش ۲ با میانگین ۳/۸۶ درجه در رتبه دوم قرار گرفت. روش ۳ با میانگین ۴/۷۶ درجه و روش ۱ با میانگین ۴/۹۰ درجه به ترتیب رتبه‌های سوم و چهارم را به خود اختصاص دادند.

از نظر حداکثر زاویه کینک، روش ۲ با حداکثر ۱۲/۵۴ درجه بهترین عملکرد را نشان داد. پس از آن روش ۴ با ۱۶/۳۶ درجه، روش ۳ با ۱۸/۹۴ درجه و روش ۱ با ۲۴/۵۴ درجه قرار گرفتند.

نکته قابل توجه در این ارزیابی آن است که میانگین زاویه کینک در تمامی روش‌ها کمتر از ۵ درجه است که نشان‌دهنده همواری قابل قبول در اتصالات پانل‌ها است. با این حال، در روش ۱، حداکثر زاویه کینک برابر با ۲۴/۵۴ درجه است که از آستانه ۱۵ درجه فراتر می‌رود. همان‌گونه که در مبانی نظری اشاره شد، زاویه‌های کینک بیش از ۱۵ درجه می‌توانند منجر به مشکلات ساخت‌پذیری و کاهش

کیفیت بصری در نقاط خاصی از سطح گردند. این نقاط با زاویه کینک بالا می‌توانند موجب ایجاد سایه‌های ناخواسته، مشکل در آب‌بندی اتصالات و کاهش زیبایی ظاهری نهایی پوشش ساختمان شوند.

۴-۴- تحلیل نتایج

یافته‌های این پژوهش به‌روشنی نشان می‌دهد که چهار روش مورد بررسی، الگوهای متمایز و معناداری از توزیع خطای تقریب ایجاد می‌کنند و هیچ روشی به‌طور مطلق بر سایرین برتری ندارد. مقایسه هم‌زمان سه معیار مکمل فاصله هاسدورف دوطرفه (حداکثر انحراف موضعی)، ریشه میانگین مربعات خطا (خطای میانگین کلی) و زاویه کینک (ناپیوستگی زاویه‌ای) آشکار می‌سازد که هر روش تعادلی خاص میان دقت ابعادی و پیوستگی سطح برقرار می‌کند (جدول ۵، جدول ۶ و شکل ۵). این رابطه مبادله‌ای میان کنترل خطای هندسی و حفظ همواری زاویه‌ای، ویژگی بنیادین فرآیند پانل‌سازی سطوح آزاد است و انتخاب روش بهینه را به یک مسئله چندمعیاره وابسته به اولویت‌های پروژه تبدیل می‌کند.

روش ۲ (شبکه‌بندی منظم پارامتریک) عملکرد برتر و متعادل‌تری از خود نشان داد. این روش کمترین مقادیر را در هر دو معیار فاصله‌ای ثبت کرد: حداکثر فاصله هاسدورف $4/73$ سانتی‌متر (مرجع به پانل) و $4/15$ سانتی‌متر (پانل به مرجع) و $RMSE$ برابر با $1/23$ سانتی‌متر. همچنین، کمترین حداکثر زاویه کینک ($12/54$ درجه) را داشت. توزیع خطا در این روش (جدول ۶) بسیار متمرکز در بازه‌های پایین است و بیش از 98% نقاط نمونه‌برداری انحراف کمتر از 5 سانتی‌متر دارند. دلیل این عملکرد آن است که شبکه‌بندی منظم، سطح را بر اساس پارامترهای یکنواخت U و V تقسیم می‌کند؛ بنابراین موقعیت رأس‌های پانل‌ها با توزیع هندسی سطح سازگاری بیشتری داشته و از ایجاد اعوجاج موضعی ناشی از تغییرات نامنظم اندازه یا شکل سلول‌ها جلوگیری می‌شود. این یکنواختی هندسی باعث کاهش هم‌زمان بیشینه انحراف (هاسدورف) و خطای میانگین ($RMSE$) شده است. این الگوی توزیع یکنواخت و کم‌انحراف، روش ۲ را به گزینه‌ای ایده‌آل برای پروژه‌هایی تبدیل می‌کند که دقت ابعادی بالا (مانند نماهای شیشه‌ای با تلورانس‌های میلی‌متری) و کنترل نقاط بحرانی اولویت اصلی است.

روش ۴ (بازم‌بندی تطبیقی چهارگوش) در معیار زاویه کینک برتری آشکار داشت. میانگین زاویه کینک $3/27$ درجه (کمترین مقدار) و توزیع غالب خطاهای زاویه‌ای در بازه کمتر از 5 درجه (جدول ۶) نشان‌دهنده همواری یکنواخت‌تر و کیفیت بصری بالاتر در اتصالات پانل‌هاست. این روش هرچند در دقت فاصله‌ای ($13/87$ سانتی‌متر) کمی ضعیف‌تر از روش ۲ عمل کرد، اما توزیع خطای آن بیشتر تطبیقی با انحناى موضعی سطح است. علت این رفتار آن است که الگوریتم بازم‌بندی تطبیقی اندازه و جهت چهارضلعی‌ها را متناسب با تغییرات انحناى سطح تنظیم می‌کند؛ در نتیجه اختلاف جهت نرمال پانل‌های مجاور کاهش یافته و زاویه کینک کوچک‌تر می‌شود. در مقابل، این آزادی در تغییر اندازه و آرایش سلول‌ها سبب می‌شود انطباق دقیق موقعیت هندسی همه نقاط سطح همواره حفظ نشود و بنابراین خطاهای فاصله‌ای نسبت به روش ۲ اندکی افزایش یابد؛ بنابراین، برای پروژه‌هایی که کیفیت ظاهری، بازتاب نور و حس پیوستگی بصری (مانند پوسته‌های بازتابنده یا نماهای داخلی) اهمیت بیشتری دارد، گزینه مناسب‌تری به شمار می‌رود.

روش ۳ (چهارضلعی‌های کج) عملکرد متوسطی دارد و در اکثر معیارها در جایگاه میانی قرار گرفت. این روش تعادل نسبی ایجاد می‌کند اما در هیچ معیاری برتری مطلق ندارد. از دیدگاه هندسی، این روش با آزاد کردن زوایا و شکل چهارضلعی‌ها بخشی از تغییرات انحناى سطح را جذب می‌کند، اما چون فاقد سازوکار تطبیقی برای تغییر اندازه و تراکم شبکه متناسب با انحناى موضعی است، نه به دقت هندسی شبکه‌بندی منظم می‌رسد و نه همواری زاویه‌ای روش بازم‌بندی تطبیقی را تأمین می‌کند.

روش ۱ (الگوی آجرچینی) ضعیف‌ترین عملکرد کلی را نشان داد: بیشترین حداکثر فاصله هاسدورف ($27/51$)، بالاترین $RMSE$ ($5/39$ سانتی‌متر) و بدترین مقادیر زاویه کینک. جدول ۶ نیز تأیید می‌کند که این روش بیشترین فراوانی خطاهای بزرگ (بیش از 15 سانتی‌متر) را دارد و توزیع خطای آن ناهموارتر است. علت هندسی این موضوع آن است که جابه‌جایی متناوب ردیف‌ها در الگوی

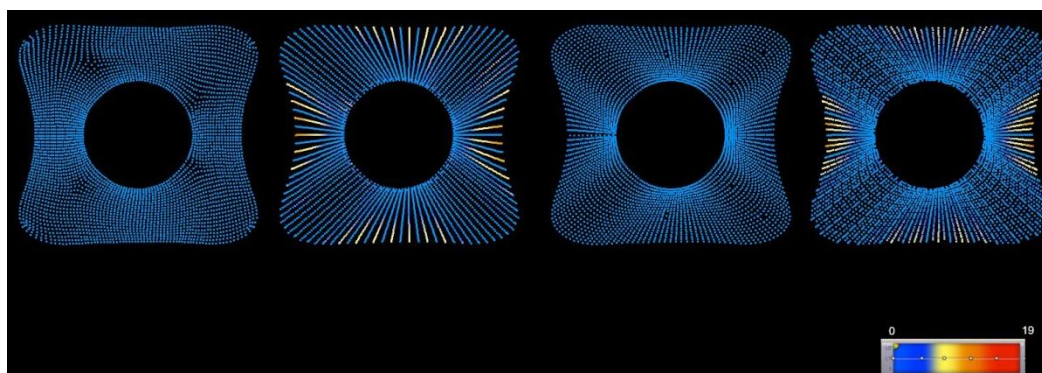
آجرچینی، پیوستگی منظم خطوط تقسیم را در دو راستای اصلی سطح بر هم می‌زند. در این سطح منحنی با انحنا مرکب، این ناهماهنگی موجب تجمع تغییر شکل در برخی پانل‌ها و افزایش انحراف موضعی در نواحی با تغییر سریع انحنا می‌شود؛ در نتیجه هم خطاهای فاصله‌ای و هم ناپیوستگی زاویه‌ای افزایش می‌یابد.

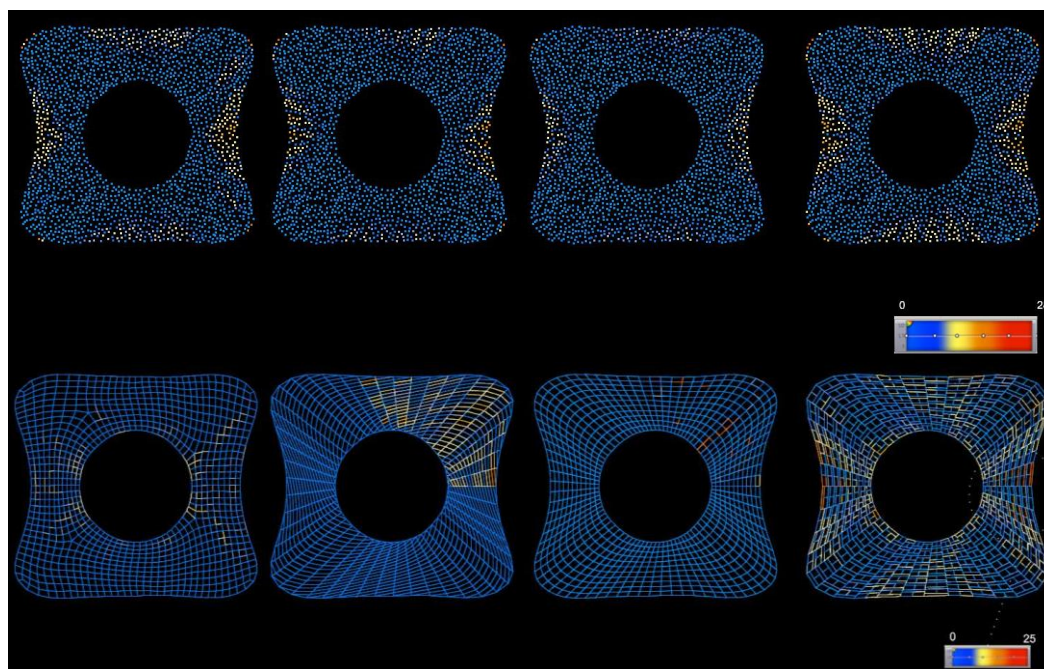
شکل ۵ به صورت گرافیکی این تفاوت‌های ساختاری را به نمایش می‌گذارد: روش ۲ و ۴ توزیع خطای فشرده و متمرکز در نواحی آبی (خطای کم) دارند، در حالی که روش ۱ الگوی پراکنده با نقاط قرمز (خطای بالا) بیشتری نشان می‌دهد. این نقشه‌های حرارتی تأکید می‌کنند که انتخاب روش نباید صرفاً بر اساس میانگین یا حداکثر خطا باشد، بلکه الگوی فضایی و توزیع خطا نیز باید مد نظر قرار گیرد.

در مجموع، نتایج این پژوهش بر وجود رابطه تعاملی میان دقت ابعادی و کیفیت بصری تأکید دارد. روشی که در کنترل حداکثر انحراف برتر است، لزوماً همواری زاویه‌ای بهتری ندارد و بالعکس. از دیدگاه هندسی، کاهش خطای فاصله‌ای مستلزم انطباق دقیق‌تر شبکه با موقعیت نقاط سطح است، در حالی که کاهش زاویه کینک نیازمند هم‌راستایی بهتر بردار نرمال پانل‌های مجاور است. این دو هدف الزاماً همسو نیستند و به همین دلیل بهبود یکی از آن‌ها ممکن است با افت نسبی دیگری همراه باشد. این یافته با مطالعات پیشین در حوزه هندسه معماری (Eigensatz et al., 2010; Pottmann et al., 2015) همخوانی دارد و نشان می‌دهد که پانل‌سازی بیش از یک مسئله هندسی صرف، یک مسئله بهینه‌سازی چندمعیاره است که باید با در نظر گرفتن اولویت‌های پروژه (دقت اجرایی، زیبایی‌شناسی، هزینه و نوع مصالح) انجام شود.

جدول ۶: توزیع فراوانی خطاهای هندسی و زاویه‌ای در چهار روش پانل‌سازی چهارگوش (مأخذ: نگارندگان)

روش پانل‌بندی	تعداد زاویه کینک (درجه)		تعداد فاصله مرجع به گسسته (سانتی‌متر)				تعداد فاصله گسسته به مرجع (سانتی‌متر)			
	۵-۰	۱۵-۵	> ۱۵	۲-۰	۵-۲	۱۵-۵	> ۱۵	۲-۰	۵-۲	۱۵-۵
روش ۱	۳۱۰۷	۱۶۸۳	۱۶۷	۱۲۳۸	۴۷۳	۲۷۹	۹	۳۳۴۳	۹۴۱	۰
روش ۲	۲۷۲۹	۸۹۹	۰	۱۹۱۶	۸۴	۰	۰	۴۷۹۸	۱۷۵	۰
روش ۳	۲۱۶۵	۱۲۶۹	۱۶	۱۴۹۹	۴۲۱	۸۰	۰	۳۰۱۰	۶۴۰	۱۶۶
روش ۴	۲۷۶۳	۸۰۹	۰	۱۷۸۲	۲۱۱	۷	۰	۳۵۱۷	۴۳۱	۰





شکل ۵: نمایش توزیع خطای هندسی و زاویه‌ای در روش‌های مختلف پانل‌سازی چهارگوش (از راست به چپ: روش‌های ۱ تا ۴). این شکل سه معیار اصلی ارزیابی دقت تقریب را برای چهار روش پانل‌سازی چهارگوش به صورت گرافیکی نشان می‌دهد. در سه ردیف افقی (از بالا به پایین)، به ترتیب موارد زیر ارائه شده‌اند: ردیف اول: میزان انحراف از سطح گسسته (پانل شده) به سطح مرجع. ردیف دوم: میزان انحراف از سطح مرجع به سطح گسسته. ردیف سوم: زاویه کینک (ناپیوستگی زاویه‌ای در مرزهای مشترک پانل‌ها). طیف رنگی از آبی تا قرمز نشان‌دهنده افزایش میزان خطا یا انحراف در هر ناحیه است. (مأخذ: نگارندگان)

۵- بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان داد که عملکرد روش‌های مختلف پانل‌بندی چهارگوش در تقریب سطوح آزاد یکسان نیست و هر روش بسته به منطق هندسی تولید شبکه، الگوی متفاوتی از توزیع خطا و کیفیت تقریب را ایجاد می‌کند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که ارزیابی عملکرد روش‌های پانل‌بندی با اتکا به یک شاخص منفرد، تصویری کامل از کیفیت تقریب ارائه نمی‌دهد؛ زیرا هر یک از شاخص‌های فاصله هاسدورف، RMSE و زاویه کینک، جنبه‌ای متفاوت از رفتار هندسی سطح پانل‌بندی شده را توصیف می‌کنند. این یافته، فرض اولیه پژوهش مبنی بر وابسته بودن مفهوم «روش مناسب» به معیارهای ارزیابی و اهداف پروژه را تأیید می‌کند.

نتایج نشان داد که روش شبکه‌بندی منظم (روش ۲) کمترین مقادیر فاصله هاسدورف و RMSE را به دست آورده و از نظر دقت هندسی عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها داشته است. این برتری را می‌توان با منطق هندسی این روش تبیین کرد. در شبکه‌بندی منظم، تقسیمات یکنواخت در فضای پارامتری سطح موجب توزیع نسبتاً یکنواخت سلول‌ها بر روی سطح شده و از تمرکز خطا در نواحی دارای تغییرات موضعی انحنا جلوگیری می‌کند. در نتیجه، انحراف موضعی و میانگین خطای هندسی در کل سطح کاهش یافته و تقریب یکنواخت‌تری نسبت به سطح مرجع حاصل می‌شود؛ بنابراین، عملکرد مناسب این روش صرفاً ناشی از تعداد پانل‌ها نیست، بلکه به نحوه سازمان‌دهی شبکه و توزیع یکنواخت خطا در سطح وابسته است.

در مقابل، روش بازمن‌بندی تطبیقی (روش ۴) کمترین مقدار زاویه کینک را ثبت کرد و از نظر پیوستگی زاویه‌ای میان پانل‌های مجاور عملکرد مطلوب‌تری داشت. علت این رفتار را می‌توان در ماهیت تطبیقی الگوریتم جستجو کرد. در این روش، توزیع سلول‌ها متناسب با تغییرات انحناى سطح اصلاح می‌شود و شبکه حاصل، انطباق بیشتری با ویژگی‌های هندسی سطح پیدا می‌کند. این ویژگی موجب کاهش اختلاف جهت بردارهای نرمال در مرز پانل‌های مجاور شده و در نتیجه زاویه کینک کاهش می‌یابد؛ بنابراین، برتری

روش ۴ در این شاخص بیش از آنکه ناشی از افزایش دقت فاصله‌ای باشد، حاصل انطباق بهتر توپولوژی شبکه با میدان انحناى سطح است.

در مقابل، روش آجرچینی (روش ۱) بیشترین مقادیر فاصله هاسدورف و RMSE را نشان داد و در برخی نواحی نیز الگوی انحراف یک‌سویه مشاهده شد. این رفتار بیانگر آن است که جابه‌جایی منظم ردیف‌های پانل، اگرچه می‌تواند در برخی کاربردها مزایای هندسی یا اجرایی داشته باشد، اما در سطوح دارای انحناى مرکب الزاماً به توزیع متوازن خطا منجر نمی‌شود. تمرکز خطا در بخش‌هایی از سطح نشان می‌دهد که ساختار شبکه این روش در تطبیق با تغییرات موضعی انحنا انعطاف کافی ندارد و بخشی از خطای تقریب در نواحی مشخصی تجمع پیدا می‌کند. همچنین روش چهارضلعی‌های کج (روش ۳) در تمامی شاخص‌ها عملکردی میانی داشت؛ به گونه‌ای که نه کمترین خطاهای فاصله‌ای را ایجاد کرد و نه بیشترین پیوستگی زاویه‌ای را فراهم ساخت. این نتیجه بیانگر آن است که تغییر شکل سلول‌های چهارضلعی، اگرچه تا حدی قابلیت انطباق شبکه با سطح را افزایش می‌دهد، اما به تنهایی برای دستیابی هم‌زمان به حداقل خطای هندسی و بیشترین پیوستگی زاویه‌ای کافی نیست.

نتایج این پژوهش با مبانی نظری ارائه‌شده در پژوهش‌های پاتمن و همکاران (2007) و ایگنساتز و همکاران (2010) همخوانی دارد که پانل‌بندی را مسئله‌ای چندمعیاره دانسته‌اند و بر این نکته تأکید کرده‌اند که هیچ الگوریتمی نمی‌تواند تمامی معیارهای هندسی و ساختی را به‌طور هم‌زمان بهینه کند. همچنین، یافته‌های حاضر با نتایج بومز و همکاران (2013) و لیو و همکاران (2011) نیز سازگار است؛ زیرا این پژوهش‌ها نشان داده‌اند که کیفیت نهایی شبکه، بیش از آنکه تابع تعداد سلول‌ها باشد، به نحوه سازمان‌دهی توپولوژی شبکه و انطباق آن با ویژگی‌های هندسی سطح وابسته است. با این حال، پژوهش‌های یادشده عمدتاً بر تولید شبکه‌های چهارگوش با کیفیت توپولوژیک بالا متمرکز بوده‌اند و عملکرد این شبکه‌ها را از منظر شاخص‌های کمی دقت تقریب به‌صورت تطبیقی ارزیابی نکرده‌اند.

از سوی دیگر، نتایج این پژوهش با مطالعات تانگ و همکاران (2014) نیز همسو است که بر ضرورت لحاظ کردن معیارهای ساخت‌پذیری در مراحل اولیه طراحی تأکید کرده‌اند. با این تفاوت که در پژوهش حاضر، تمرکز بر ارزیابی هندسی روش‌های پانل‌بندی در یک محیط کنترل‌شده بوده است و تلاش شده است بدون ورود به متغیرهای اجرایی، رفتار هندسی الگوریتم‌ها تحت شرایط یکسان مقایسه شود. همچنین، استفاده هم‌زمان از فاصله هاسدورف، RMSE و زاویه کینک، یافته‌های مطالعات وانگ و همکاران (2018) و گاونیل و همکاران (2018) را تکمیل می‌کند؛ زیرا این مطالعات عمدتاً از یک شاخص برای ارزیابی کیفیت تقریب استفاده کرده‌اند، در حالی که نتایج پژوهش حاضر نشان می‌دهد اتکا به یک شاخص منفرد ممکن است تصویری ناقص از عملکرد واقعی روش‌های پانل‌بندی ارائه دهد.

بر اساس یافته‌های این پژوهش، نمی‌توان یک روش را به‌عنوان «بهترین روش» برای تمامی پروژه‌های معماری معرفی کرد. نتایج نشان داد که هر روش بسته به معیار ارزیابی، نقاط قوت و محدودیت‌های متفاوتی دارد؛ بنابراین، انتخاب روش مناسب باید بر مبنای اولویت‌های هندسی پروژه و شاخص‌های مورد نظر انجام شود، نه بر اساس برتری یک روش در یک معیار منفرد. این نتیجه با مرور اخیر فیشر و همکاران (2024) نیز همخوانی دارد که بر نبود چارچوب‌های جامع برای ارزیابی تطبیقی روش‌های پانل‌بندی و ضرورت استفاده از معیارهای چندگانه در فرآیند تصمیم‌گیری تأکید کرده‌اند. از این منظر، یافته‌های پژوهش حاضر نشان می‌دهد که ارزیابی هم‌زمان شاخص‌های مکمل می‌تواند مبنای علمی مناسب‌تری برای مقایسه عملکرد روش‌های پانل‌بندی نسبت به ارزیابی تک‌معیاره فراهم آورد.

نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک چارچوب ارزیابی و تصمیم‌گیری چندمعیاره برای مقایسه روش‌های متداول پانل‌بندی چهارگوش است. برخلاف اغلب مطالعات پیشین که بر توسعه الگوریتم‌های جدید یا ارزیابی یک شاخص منفرد تمرکز داشته‌اند، این پژوهش با به‌کارگیری هم‌زمان سه شاخص مکمل شامل فاصله هاسدورف، (RMSE) و زاویه کینک، نشان داد که هیچ روشی در تمامی معیارها برتری مطلق ندارد و انتخاب روش مناسب باید بر اساس اولویت‌های هندسی پروژه انجام شود. بدین ترتیب، پژوهش

حاضر ضمن پوشش بخشی از خلأ موجود در ارزیابی تطبیقی روش‌های پانل‌بندی، چارچوبی قابل تعمیم برای مقایسه سایر روش‌ها و سطوح مرجع نیز ارائه می‌کند.

محدودیت‌های پژوهش باید در تفسیر نتایج این مطالعه مورد توجه قرار گیرند. ارزیابی‌ها بر روی یک سطح مرجع نریز با انحنا مرکب و چهار روش متداول پانل‌بندی چهارگوش انجام شده است؛ از این رو، مقادیر کمی به‌دست‌آمده لزوماً به سایر سطوح یا خانواده‌های دیگر الگوریتم‌های پانل‌بندی قابل تعمیم نیست، هرچند چارچوب ارزیابی پیشنهادی قابلیت به‌کارگیری در آن‌ها را دارد. همچنین، دامنه پژوهش به ارزیابی هندسی مدل‌های دیجیتال بر پایه سه شاخص فاصله هاسدورف، (RMSE) و زاویه کینک محدود بوده و عواملی مانند رفتار مصالح، هزینه و زمان ساخت، تلورانس‌های اجرایی، جزئیات اتصالات و عملکرد سازه‌ای در این مطالعه بررسی نشده‌اند؛ بنابراین، یافته‌های این پژوهش صرفاً بیانگر عملکرد هندسی روش‌های پانل‌بندی در شرایط کنترل‌شده است و باید در چارچوب همین محدودیت‌های پژوهش تفسیر شوند.

بر این اساس، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده، چارچوب ارائه‌شده بر روی سطوح آزاد متنوع‌تر، سایر خانواده‌های پانل‌بندی (مانند پانل‌های مثلثی و شش‌ضلعی) و با استفاده از شاخص‌های هندسی تکمیلی نظیر خطای تخت‌بودن، اعوجاج زاویه‌ای و هم‌راستایی با خطوط انحنا ارزیابی شود. همچنین، تلفیق این چارچوب با معیارهای اقتصادی، اجرایی و ساخت‌پذیری می‌تواند زمینه توسعه سامانه‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره برای انتخاب بهینه روش پانل‌بندی در پروژه‌های معماری را فراهم سازد.

۶- تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تعارض منفعی در ارتباط با این پژوهش وجود ندارد.

۷- مشارکت نویسندگان

مقاله حاضر برگرفته از پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده اول با عنوان "کاربرد هندسه رایانشی در ساده‌سازی ساخت سطوح منحنی معماری با استفاده از روش تقریب سطح" می‌باشد، که با راهنمایی نگارنده دوم و مشاوره نگارنده سوم در دانشگاه هنر اسلامی تبریز در حال انجام است.

۸- بیانیه استفاده از هوش مصنوعی

در تهیه این مقاله از ChatGPT (OpenAI) به منظور جست‌وجوی منابع معتبر و گردآوری اولیه داده‌های پیشینه پژوهش و ویرایش نگارشی استفاده شده است. تمامی تحلیل‌های علمی، تفسیر نتایج، نتیجه‌گیری‌ها و مسئولیت کامل محتوای مقاله بر عهده نویسندگان بوده و نسخه نهایی مقاله توسط آنان به‌طور کامل بازبینی و تأیید شده است.

۹- منابع

- 1- Abdelkader, A., Bajaj, C. L., Ebeida, M. S., Mahmoud, A. H., Mitchell, S. A., Owens, J. D., & Rushdi, A. A. (2020). VorCrust: Voronoi meshing without clipping. *ACM Transactions on Graphics*, 39(3), 1–16.
- 2- Aspert, N., Santa-Cruz, D., & Ebrahimi, T. (2002). MESH: Measuring errors between surfaces using the Hausdorff distance. *Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, 1, 705–708.
- 3- Aurenhammer, F. (1991). Voronoi diagrams—A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3), 345–405. <https://doi.org/10.1145/116873.116880>
- 4- Babuška, I., & Strouboulis, T. (2004). Adaptive mesh refinement for the numerical solution of partial differential equations. *Applied Mechanics Reviews*, 57(1), 59–82. <https://doi.org/10.1115/1.1559161>

- 5- Beckingsale, D. A., Hornung, R. D., Kunen, A. J., & Gamblin, T. (2016). Towards scalable adaptive mesh refinement on future parallel architectures. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 28(12), 3443–3465. <https://doi.org/10.1002/cpe.3868>
- 6- Bo, P., Pottmann, H., Kilian, M., Wang, W., & Wallner, J. (2011). Architectural geometry from research to practice: The Eiffel Tower pavilion. In J. Wallner & H. Pottmann (Eds.), *Advances in Architectural Geometry 2010* (pp. 213–220). Springer.
- 7- Bommers, D., Lévy, B., Pietroni, N., Puppo, E., Silva, C., Tarini, M., & Zorin, D. (2013). Quad-mesh generation and processing: A survey. *Computer Graphics Forum*, 32(6), 51–76. <https://doi.org/10.1111/cgf.12014>
- 8- Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P., & Lévy, B. (2010). *Polygon Mesh Processing*. AK Peters/CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b10688>
- 9- Catmull, E., & Clark, J. (1978). Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10(6), 350–355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- 10- Chaikin, G. M. (1974). An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3(4), 346–349. [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(74\)90028-8](https://doi.org/10.1016/0146-664X(74)90028-8)
- 11- Chen, L. M. (2014). Discretization, digitization, and embedding. In *Digital and Discrete Geometry: Theory and Algorithms* (pp. 131–148). Springer International Publishing.
- 12- Cignoni, P., Rocchini, C., & Scopigno, R. (1998). Metro: Measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 17(2), 167–174. <https://doi.org/10.1111/1467-8659.00236>
- 13- Deng, Z., Liu, Y., Pan, H., Jabi, W., Zhang, J., & Deng, B. (2023). Sketch2PQ: Freeform planar quadrilateral mesh design via a single sketch. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 29(9), 3826–3839. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2022.3170853>
- 14- Do Carmo, M. P. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications.
- 15- Doo, D., & Sabin, M. (1978). Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10(6), 356–360. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90155-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90155-0)
- 16- Eder, G., Held, M., & Palfrader, P. (2018). Parallelized ear clipping for the triangulation and constrained Delaunay triangulation of polygons. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 73, 15–23. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2018.01.004>
- 17- Eigensatz, M., Kilian, M., Schiftner, A., Mitra, N. J., Pottmann, H., & Pauly, M. (2010). Paneling architectural freeform surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4), Article 45. <https://doi.org/10.1145/1778765.1778842>
- 18- Farin, G. (2002). *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide* (5th ed). Academic Press.
- 19- Fisher, A., Tan, X., Billah, M., Lingras, P., Huang, J., & Mago, V. (2024). PAAD: Panelization algorithm for architectural designs. *PLoS ONE*, 19(6), Article e0303646. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0303646>
- 20- Gavriil, K., Schiftner, A., & Pottmann, H. (2018). Optimizing B-spline surfaces for developability and paneling architectural freeform surfaces. *Advances in Architectural Geometry*.
- 21- Gerritsen, M. G. (2006). Developable surfaces and form finding. *Proceedings of the 10th International Conference on the Application of Shape and Shape Analysis in CAD/CAM*, 1–7.
- 22- Glaeser, G., & Gruber, F. (2007). Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts*, 1(1), 59–71. <https://doi.org/10.1080/17513470701230004>
- 23- Glymph, J., Shelden, D., Ceccato, C., Mussel, J., & Schober, H. (2004). A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar faces. *Automation in Construction*, 13(2), 187–202. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2003.09.008>
- 24- Kilian, M., Flöry, S., Chen, Z., Mitra, N. J., Sheffer, A., & Pottmann, H. (2008). Curved folding. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3), Article 75. <https://doi.org/10.1145/1360612.1360674>
- 25- Kolmanič, S., & Guid, N. (2002). Developable surface fitting to point clouds. *International Journal of Shape Modeling*, 8(2), 163–173. <https://doi.org/10.1142/S0218654302000138>
- 26- Kwak, S., & Pozrikidis, C. (1998). Adaptive triangulation of evolving, closed, or open surfaces by the advancing-front method. *Journal of Computational Physics*, 145(1), 61–88. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5981>
- 27- Li, H., Zeng, W., Morvan, J.-M., Chen, L., & Gu, X. D. (2014). Surface meshing with curvature convergence. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 20(6), 919–934. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2013.253>
- 28- Liu, H., & Liu, Y. (2025). Workflow for mitigating shape diversity in free-form surface panels through clustering and evaluation. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/13467581.2025.2498116>
- 29- Liu, Y., Pottmann, H., & Wang, W. (2011). Design of developable interpolating strips. *Computer-Aided Design and Applications*, 8(4), 557–570.

- 30- Mehdipoor, A., Anane, W., Mehdipoorkaloorazi, S., & Iordanova, I. (2025). Integration of BIM and robotic fabrication for sustainable design and manufacturing of free-form building façade panels in off-site construction. *Architecture, Structures and Construction*, 5, Article 27. <https://doi.org/10.1007/s44150-025-00142-6>
- 31- Nasri, A., Sabin, M., Zaki, R. A., Nassiri, N., & Santina, R. (2006). Feature curves with cross curvature control on Catmull-Clark subdivision surfaces. In *Proceedings of Computer Graphics International Conference* (pp. 761–768). Springer.
- 32- O'Neill, B. (2006). *Elementary Differential Geometry* (Rev. 2nd ed). Academic Press.
- 33- Owen, S. J. (1998). A survey of unstructured mesh generation technology. In *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable* (pp. 239–267). Sandia National Laboratories.
- 34- Park, G., Kim, C., Lee, M., & Choi, C. (2020). Building geometry simplification for improving mesh quality of numerical analysis model. *Applied Sciences*, 10(16), 5425.
- 35- Park, H. (2001). An approximate lofting approach for B-spline surface fitting to functional surfaces. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 18(7), 474–482. <https://doi.org/10.1007/s001700170051>
- 36- Piaskowy, T., & Kaszynski, P. (2025). Optimizing glass panel geometry for freeform architecture: A curvature-based pavilion study. *Buildings*, 15(20), Article 3635. <https://doi.org/10.3390/buildings15203635>
- 37- Pottmann, H. (2013). Architectural geometry and fabrication-aware design. *Nexus Network Journal*, 15(2), 195–208. <https://doi.org/10.1007/s00004-013-0149-5>
- 38- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., & Kilian, A. (2007). *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.
- 39- Pottmann, H., Eigensatz, M., Vaxman, A., & Wallner, J. (2015). Architectural geometry. *Computers & Graphics*, 47, 145–164. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2014.11.002>
- 40- Ray, N., Li, W. C., Lévy, B., Sheffer, A., & Alliez, P. (2006). Periodic global parameterization. *ACM Transactions on Graphics*, 25(4), 1460–1485.
- 41- Ryu, J. W. (2012). Digital technologies for freeform building in Korea. *Journal of the Korea Academia-Industrial Cooperation Society*, 13(9), 4281–4288.
- 42- Salinas, S., Alvarez, M., & Hitschfeld, N. (2025). Exploring polyhedral mesh generation from Delaunay tetrahedral meshes. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2310.03665>
- 43- Schmiedhofer, H., Ziegler, R., Schiftner, A., & Brell-Çokcan, S. (2008). Design and panelization of architectural freeform surfaces by planar quadrilateral meshes. In *Advances in Architectural Geometry* (pp. 85–98). TU Wien.
- 44- Sevtuk, A., & Kalvo, R. (2014). A freeform surface fabrication method with 2D cutting. *Annual Simulation Symposium*, Article 20. <https://doi.org/10.5555/2664323.2664343>
- 45- Shewchuk, J. R. (2002). Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 22(1–3), 21–74. [https://doi.org/10.1016/S0925-7721\(01\)00047-5](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(01)00047-5)
- 46- Springborn, B., Schröder, P., & Pinkall, U. (2008). Conformal equivalence of triangle meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3), Article 77.
- 47- Stefańska, A., & Rokicki, W. (2022). Architectural design optimisation in reticulated free-form canopies. *Buildings*, 12(8), Article 1068. <https://doi.org/10.3390/buildings12081068>
- 48- Tang, C., Bo, P., Wallner, J., & Pottmann, H. (2014). Interactive design of developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 33(4), Article 136, 1–12. <https://doi.org/10.1145/2601097.2601204>
- 49- Warren, J., & Weimer, H. (2001). *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*. Morgan Kaufmann.



Evaluating Approximation Accuracy in Panelization of Architectural Curved Surfaces

(A Case Study of Quadrilateral Panels)

Faezeh Ramezani¹, Majid Ahmadnejad Karimi^{*2}, Asem Sharbaf³

1-MSc. Student, Department of Digital Architectural Technology, Faculty of Architecture and Urban Planning, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.

fa.ramazani@tabriziau.ac.ir

2-Assistant Prof., Faculty of Architecture and Urban Planning, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran. (Corresponding Author)

m.ahmadnejad@tabriziau.ac.ir

3-Assistant Prof., Faculty of Architecture and Urban Planning, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.

a.sharbaf@tabriziau.ac.ir

Extended Abstract

Aims: The increasing use of freeform geometries in contemporary architecture has transformed the conversion of continuous curved surfaces into manufacturable panels into a major challenge of digital design and fabrication. Although numerous quadrilateral panelization techniques have been proposed, selecting an appropriate method remains difficult because each algorithm balances geometric accuracy, visual smoothness, and fabrication considerations differently. Existing studies have primarily focused on developing new algorithms or improving individual characteristics, while little attention has been devoted to systematic frameworks supporting multi-criteria decision-making. This study aims to develop a multi-criteria decision-making framework for evaluating and selecting quadrilateral panelization methods according to complementary geometric accuracy metrics. The novelty lies in integrating three quantitative indicators—Hausdorff Distance (HD), Root Mean Square Error (RMSE), and Kink Angle—with comparative analysis of spatial error distribution patterns, enabling objective assessment according to project-specific priorities rather than assuming a universally optimal method.

Materials and Methods: The research adopted a computational experimental methodology based on a controlled case-study model. A NURBS reference surface with compound curvature was created in Rhinoceros 3D, incorporating regions with positive, negative, and zero Gaussian curvature. Four representative quadrilateral panelization approaches were implemented in Grasshopper: Brick Pattern, Regular Grid, Skew Quadrilateral, and Adaptive Remeshing. All algorithms were evaluated under identical conditions: approximately 950 panels, identical geometric tolerances, and uniform computational settings. Two thousand uniformly distributed random sample points were generated for geometric evaluation. Hausdorff Distance measured maximum local geometric deviation, RMSE evaluated overall average deviation, and Kink Angle quantified angular discontinuity along panel boundaries. This simultaneous application enabled comprehensive evaluation of both dimensional accuracy and geometric continuity.

¹ This article is derived from the first author's master's thesis, entitled "Application of Computational Geometry in Simplifying the Construction of Curved Architectural Surfaces Using the Surface Approximation Method," which is currently being conducted at the Tabriz Islamic Art University under the supervision of the second author and the advisory of the third author.

Findings: The investigated panelization methods exhibit significantly different geometric behaviors, with no single algorithm consistently outperforming others across all criteria. Regular Grid achieved highest geometric accuracy with maximum Hausdorff Distances of 4.73 cm and 4.15 cm and lowest RMSE of 1.23 cm, indicating superior dimensional fidelity. Adaptive Remeshing provided best visual continuity with mean Kink Angle of 3.27° and maximum of 16.36° , indicating smoother transitions between panels. Brick Pattern exhibited weakest performance with maximum Hausdorff Distances of 27.51 cm and 18.24 cm and RMSE of 5.39 cm, revealing systematic one-sided deviation patterns suggesting cumulative geometric errors. Skew Quadrilateral demonstrated intermediate performance without clear advantages. Comparative analysis revealed distinct spatial error patterns: some methods concentrate deviations locally while others distribute errors uniformly. These findings confirm an inherent trade-off between dimensional accuracy and visual smoothness.

Conclusion: The proposed framework demonstrates that evaluating quadrilateral panelization methods requires simultaneous consideration of multiple complementary geometric criteria rather than reliance on a single metric. The concept of the “best” panelization method is context-dependent and should be interpreted according to project priorities. The framework supports informed decision-making by revealing strengths and limitations of different strategies under identical experimental conditions. Beyond comparative evaluation, it provides a transferable methodology applicable to other freeform geometries and alternative algorithms, enabling designers to compare solutions objectively and select appropriate strategies according to specific design objectives and geometric constraints, thereby bridging quantitative geometric evaluation and practical design decision-making.

Keywords: Quadrilateral panelization, approximation accuracy, Hausdorff error, root mean square error, kink angle.



This Journal is an open access Journal Licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License

(CC BY 4.0)